Nejednakosti među polinomima jedne ili više realnih varijabli i njihove primjene

Ilija Ilišević*

Sažetak. **Sažetak.** *U radu se obrađene nejednakosti među polinomima jedne ili više varijabli. Primjene spomenutih nejednakosti ilustriraju se na velikom broju primjera koji su prilagođeni učenicima srednje škole.*

Ključne riječi: *nejednakosti*

Inequalities between polynomials of one or more real variables and their applications

Abstract. *In this paper we examine the inequalities between polynomials of one or more variables. Applications of the mentioned inequalities are illustrated on many examples which are adapted to high-school pupils.*

Key words: *Inequalities*

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, zove se realni polinom jedne varijable (varijable x). Brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ zovu se koeficijenti polinoma; koeficijent a_n je vodeći ili najstariji koeficijent. Prirodan broj n nazivamo stupanj polinoma i pišemo $\mathrm{st} f = n$. Ponekad polinom označavamo sa $P(x)$ ili $P_n(x)$, gdje je n stupanj polinoma.

Svako preslikavanje $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadano sa

$$f(x, y) = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots + f_n(x)y^n,$$

gdje su $f_0, f_1, \ldots, f_n$ realni polinomi jedne varijable zove se realni polinom dviju varijabli.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Preslikavanje $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirano formulom

$$f(x, y, z) = f_0(x, y) + f_1(x, y)z + f_2(x, y)z^2 + \cdots + f_n(x, y)z^n,$$

gdje su $f_0, f_1, \ldots, f_n$ realni polinomi dviju varijabli zove se realni polinom triju varijabli.

Slično se dalje induktivno definiraju i realni polinomi n varijabli.

Riješimo sada nekoliko zadataka o dokazivanju nejednakosti među polinomima i primjeni tih nejednakosti pri rješavanju algebarskih jednadžbi te pri određivanju ekstremnih vrijednosti polinoma.

Zadatak 1. *Dokažite da za svaki realni broj x vrijedi*

$$x^2 - x + 1 > 0.$$

Rješenje.

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

Zadatak 2. *Dokažite da za svaki realni broj a vrijedi nejednakost*

$$a^4 - 3a^2 - 4a + 8 > 0.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} & a^4 - 3a^2 - 4a + 8 \\ = \ & (a^4 - 4a^2 + 4) + (a^2 - 4a + 4) \\ = \ & (a^2 - 2)^2 + (a - 2)^2 > 0. \end{aligned}$$

Vrijedi stroga nejednakost jer $a^2 - 2$ i $a - 2$ ne mogu istodobno biti jednaki nuli.

Zadatak 3. *Dokažite da za svaki realni broj a vrijedi nejednakost*

$$2a^4 + 1 \geq 2a^3 + a^2.$$

Rješenje. Dana nejednakost ekvivalentna je sa

$$2a^4 - 2a^3 - a^2 + 1 \geq 0.$$

Dokažimo ovu nejednakost.

$$\begin{aligned} & 2a^4 - 2a^3 - a^2 + 1 \\ = \ & 2a^3(a - 1) - (a^2 - 1) \\ = \ & 2a^3(a - 1) - (a - 1)(a + 1) \\ = \ & (a - 1)(2a^3 - a - 1). \end{aligned}$$

Kako je 1 nul-točka polinoma $2a^3 - a - 1$, članove tog polinoma grupiramo tako da možemo izlučiti faktor $a - 1$.

$$\begin{aligned} & 2a^3 - a - 1 \\ = \;& 2a^3 - 2a^2 + 2a^2 - a - 1 \\ = \;& 2a^3 - 2a^2 + 2a^2 - 2a + a - 1 \\ = \;& 2a^2(a-1) + 2a(a-1) + a - 1 \\ = \;& (a-1)(2a^2 + 2a + 1) \\ = \;& (a-1)\left(2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Dakle,

$$2a^4 - 2a^3 - a^2 + 1 = (a-1)^2\left(2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = 1$.

Zadatak 4. *Dokažite da za svaki realni broj x vrijedi nejednakost*

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1.001 > 0.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} & (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1.001 \\ = \;& \big((x-1)(x-4)\big)\big((x-2)(x-3)\big) + 1.001 \\ = \;& \big((x^2 - 5x + 5) - 1\big)\big((x^2 - 5x + 5) + 1\big) + 1.001 \\ = \;& (x^2 - 5x + 5)^2 - 1 + 1.001 = (x^2 - 5x + 5)^2 + 0.001 > 0. \end{aligned}$$

Zadatak 5. *Odredite najmanju vrijednost polinoma*

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^4 - 4x^3 + 4x^2) + (2x^2 - 4x) + 2 \\ &= (x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) + 1 + 1 \\ &= (x^2 - 2x + 1)^2 + 1 \\ &= (x-1)^4 + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Najmanja vrijednost polinoma $P(x)$ iznosi 1 i postiže se za $x = 1$.

Zadatak 6. *Dokažite da jednadžba*

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

nema realnih korijena.

Rješenje.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \\ &= x^4+2x^3+x^2+x^2+x^2+2x+1 \\ &= (x^4+2x^3+x^2)+(x^2+2x+1)+x^2 \\ &= (x^2+x)^2+(x+1)^2+x^2 \\ &= x^2(x+1)^2+(x+1)^2+x^2>0. \end{aligned}$$

Vrijedi stroga nejednakost jer $(x+1)^2$ i x^2 ne mogu istodobno biti jednaki nuli. Dakle, ne postoji realan broj x za koji je $P(x)=0$, pa dana jednadžba nema realnih korijena.

Zadatak 7. *Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi nejednakost*

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y.$$

Rješenje. Dana nejednakost je ekvivalentna redom sa

$$x^2+y^2+1-xy-x-y \geq 0,$$

$$2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y \geq 0,$$

$$(x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) \geq 0,$$

$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 0,$$

koja je istinita za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pa je i polazna nejednakost istinita za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $x=y=1$.

Zadatak 8. *Dokažite da za sve realne brojeve x, y i z vrijedi nejednakost*

$$x^2+y^2+3z^2-2xz-2yz-2z+1 \geq 0.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+3z^2-2xz-2yz-2z+1 \\ = \;& (x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2z+1) \\ = \;& (x-z)^2+(y-z)^2+(z-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x=y=z=1$.

Zadatak 9. *Odredite za koje vrijednosti realnih varijabli x i y polinom*

$$P(x,y) = -x^2-y^2+26x+10y+2007$$

ima najveću vrijednost i kolika je ta vrijednost.

Rješenje.

$$\begin{aligned} P(x,y) &= (-x^2+26x-169)+(-y^2+10y-25)+2201 \\ &= -(x^2-26x+169)-(y^2-10y+25)+2201 \\ &= 2201-(x-13)^2-(y-5)^2 \leq 2201. \end{aligned}$$

Dakle, $P_{\max}(x,y) = 2201$ za $x = 13$, $y = 5$.

Zadatak 10. *Za koje vrijednosti realnih varijabli x i y polinom*

$$P(x,y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$$

poprima najmanju vrijednost?

Rješenje. Prema aritmetičko-geometrijskoj nejednakosti je

$$1 + x^2y^4 + x^4y^2 \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^2y^4 \cdot x^4y^2} = 3x^2y^2,$$

pa je

$$P(x,y) \geq 3 + 3x^2y^2 - 3x^2y^2 = 3.$$

Stoga je $P_{\min}(x,y) = 3$ i to za $x^2y^4 = x^4y^2 = 1$, odnosno za $x^2 = y^2 = 1$. Dakle,

$$(x,y) \in \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}.$$

Zadatak 11. *Odredite najmanju vrijednost funkcije*

$$f(x) = (x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b).$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \big(x+(a+b)\big)\big(x-(a+b)\big)\big(x+(a-b)\big)\big(x-(a-b)\big)\\
&= \big(x^2-(a+b)^2\big)\big(x^2-(a-b)^2\big)\\
&= (x^2-a^2-2ab-b^2)(x^2-a^2+2ab-b^2)\\
&= \big((x^2-a^2-b^2)-2ab\big)\big((x^2-a^2-b^2)+2ab\big)\\
&= (x^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2 \geq -4a^2b^2.
\end{aligned}$$

Najmanja vrijednost funkcije f iznosi $-4a^2b^2$ i postiže se $x^2-a^2-b^2=0$ tj. za $x = \pm\sqrt{a^2+b^2}$.

Zadatak 12. *Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi nejednakost*

$$x^2y^4 - 4xy^3 + 2(x^2+2)y^2 + 4xy + x^2 \geq 0.$$

Rješenje. Dana nejednakost je ekvivalentna redom sa

$$x^2y^4 - 4xy^3 + 2x^2y^2 + 4y^2 + 4xy + x^2 \geq 0,$$

$$x^2(y^4+2y^2+1) - 4x(y^3-y) + 4y^2 \geq 0,$$

$$(y^2+1)^2x^2 - 4y(y^2-1)x + 4y^2 \geq 0.$$

Lijevu stranu nejednakosti možemo smatrati polinomom po varijabli x :

$$P(x) = (y^2+1)^2x^2 - 4y(y^2-1)x + 4y^2.$$

Kako je $(y^2+1)^2 > 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, to je $P(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ako i samo ako diskriminanta od $P(x)$ nije pozitivna. Imamo

$$\begin{aligned} D &= 16y^2(y^2-1)^2 - 16y^2(y^2+1)^2 \\ &= 16y^2(y^4-2y^2+1-y^4-2y^2-1) \\ &= -64y^4 \leq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 13. *Odredite sva realna rješenja jednadžbe*

$$2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4) = 7.$$

Rješenje. Kako je

$$x^4-2x^2+3 = (x^2-1)^2+2 \geq 2$$

i

$$y^4-3y^2+4 = \Big(y^2-\frac{3}{2}\Big)^2+\frac{7}{4} \geq \frac{7}{4},$$

to je

$$2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4) \geq 2\cdot 2\cdot \frac{7}{4} = 7.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je

$$x^4-2x^2+3 = 2 \quad \text{i} \quad y^4-3y^2+4 = \frac{7}{4},$$

a to je ako i samo ako je

$$x^2-1 = 0 \quad \text{i} \quad y^2-\frac{3}{2} = 0.$$

Obje jednadžbe imaju samo realne korijene. Korijeni prve jednadžbe su $x_{1,2} = \pm 1$, a druge $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Dakle,

$$(x,y) \in \Big\{\Big(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\Big),\Big(1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\Big),\Big(-1,\frac{\sqrt{6}}{2}\Big),\Big(-1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\Big)\Big\}.$$

Zadatak 14. *Dokažite da je polinom*

$$P(x) = x^8-x^5+x^2-x+1$$

pozitivan za sve realne vrijednosti varijable x.

Rješenje. Promotrit ćemo intervale $\langle -\infty, 0]$, $\langle 0,1\rangle$ i $[1,\infty\rangle$.

Neka je $x \in \langle -\infty, 0]$. Tada su x^8, $-x^5$, x^2, $-x \geq 0$, pa je $P(x) \geq 1$.

Za $x \in \langle 0,1\rangle$ polinom zapišemo u obliku

$$P(x) = x^8 + x^2(1-x^3) + (1-x).$$

Kako je $x^8 > 0$, $x^2 > 0$, $1-x^3 > 0$, $1-x > 0$, to je $P(x) > 0$.

Neka je $x \in [1, \infty\rangle$. Zapišimo

$$P(x) = x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1.$$

Kako je $x^5 > 0$, $x^3 - 1 \geq 0$, $x > 0$, $x - 1 \geq 0$, to je $P(x) \geq 1$.

Zadatak 15. *Dokažite da jednadžba*

$$x^{26} - x^{21} + x^{18} - x^3 + 1 = 0$$

nema realnih rješenja.

Rješenje. Dokažimo da polinom $P(x) = x^{26} - x^{21} + x^{18} - x^3 + 1$ ne može poprimiti vrijednost 0 niti za jedan realan broj x.

Neka je $x \in \langle -\infty, 0]$. Tada je $x^{26} \geq 0$, $-x^{21} \geq 0$, $x^{18} \geq 0$, $-x^3 \geq 0$, pa je $P(x) \geq 1$.

Ako je $x \in \langle 0, 1\rangle$, zapišemo polinom u obliku

$$P(x) = x^{26} + x^{18}(1 - x^3) + 1 - x^3 = x^{26} + (1 - x^3)(1 + x^{18}).$$

Kako je $x^{26} > 0$, $1 - x^3 > 0$, $1 + x^{18} > 0$, to je $P(x) > 0$.

Neka je $x \in [1, \infty\rangle$. Zapišimo

$$P(x) = x^{21}(x^5 - 1) + x^3(x^{15} - 1) + 1.$$

Kako je $x^{21} > 0$, $x^5 - 1 \geq 0$, $x^3 > 0$, $x^{15} - 1 \geq 0$, to je $P(x) \geq 1$.

Dakle, dana jednadžba nema realnih rješenja.

Zadaci za vježbu

1. Dokažite da za svaki realni broj x vrijedi:
   (a) $2x^2 + x + 3 > 0$,
   (b) $-x^2 + 2x + 7 < 0$,
   (c) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 9 \geq 0$.
2. Dokažite da za svaki realni broj x vrijedi nejednakost
$$x^{10} - x^7 + x^4 - x^2 + 1 > 0.$$
3. Dokažite da za svaki realni broj a vrijedi nejednakost
$$a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 > 0.$$
4. Dokažite da za svaki realni broj x vrijedi nejednakost
$$2x^2 + 6x + 5 > 0.$$
5. Dokažite da za svaki realni broj a vrijedi nejednakost
$$4a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 4a + 1 \geq 0.$$

6. Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi nejednakost

$$x^2 - xy + y^2 \geq 0.$$

7. Dokažite da za sve realne brojeve x, y i z vrijedi nejednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0.$$

8. Za koje vrijednosti varijabli x i y polinom

$$P(x, y) = x^4 + 2x^2 + y^2 - 2y + 2$$

ima najmanju vrijednost?
Rješenje: $P_{\min}(x, y) = 1$ za $(x, y) = (0, 1)$.

9. Za koje vrijednosti varijabli dani polinomi imaju najmanju vrijednost? Kolika je ta vrijednost?

(a) $P(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$,

(b) $Q(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 12x + 30y + 2007$,

(c) $R(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y$,

(d) $M(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12y - 14x + 100$.

Rješenje:

(a) $P_{\min}(x, y) = 0$ za $(x, y) = (2, -3)$,

(b) $Q_{\min}(x, y) = 1973$ za $(x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{5}{3})$,

(c) $R_{\min}(x, y) = -5$ za $(x, y) = (2, -3)$,

(d) $M_{\min}(x, y, z) = 15$ za $(x, y, z) = (7, 6, 0)$.

10. Dokažite da polinom $P(x) = x^4 - x + \frac{1}{2}$ poprima samo pozitivne vrijednosti za sve realne vrijednosti varijable x.

11. Odredite realne brojeve x i y koji zadovoljavaju jednadžbu

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 3 = 0.$$

Rješenje: Jednadžba nema realnih rješenja.

12. Odredite najmanji cijeli broj k takav da nejednakost

$$(k - 2)x^2 + 8x + k + 4 > 0$$

vrijedi za svaki realni broj x.
Rješenje: $k = 5$.

13. Za koju vrijednost cijelog broja n nejednakost

$$x^2 - 2(2n - 1)x + 15n^2 - 2n - 7 > 0$$

vrijedi za svaki realni broj x?
Rješenje: $n = 3$.

14. Odredite sve vrijednosti realnog parametra p za koje je funkcija:

(a) $f(x) = (p^2 + 2p - 3)x^2 - 4px + p$,

(b) $f(x) = -px^2 + (1 - p)x - 2p$,

(c) $f(x) = (1 - p^2)x^2 + 2(p - 1)x + p$

pozitivna za sve vrijednosti realne varijable x.
Rješenje:

(a) $p \in \langle 3, \infty \rangle$,

(b) $p \in \langle -\infty, \frac{-1-2\sqrt{2}}{7} \rangle$,

(c) $p \in \langle \sqrt{2} - 1, 1 \rangle$.

15. Dokažite da za sve realne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3}{2} \geq a + b + c.$$

16. Dokažite da za sve realne brojeve x, y i z vrijedi nejednakost

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 1 \geq 2z(x + y + 1).$$

17. Dokažite da je vrijednost polinoma

$$P(x) = x^6 - x^5 + x^4 + x^2 - x + 1$$

uvijek pozitivna.

18. Dokažite da vrijednost polinoma

$$P(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 6xy - 2xz + 5yz$$

ne može biti negativna.

19. Dokažite da za sve realne brojeve x, y i z vrijedi nejednakost

$$4x(x + y)(x + z)(x + y + z) + y^2z^2 \geq 0.$$

20. Dokažite da za sve realne brojeve x, y i z vrijedi nejednakost

$$2(x^4 + y^4 + z^4) \geq x^3y + y^3z + z^3x + xy^3 + yz^3 + zx^3.$$

21. Dokažite da je za svaki realni broj x polinom

$$P(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + \frac{3}{4}$$

pozitivan.

22. Dokažite da za sve realne brojeve a i b vrijedi

$$8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4.$$

23. Dokažite da za sve realne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 6abc.$$

24. Dokažite da za svaki realni broj x vrijedi nejednakost

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

25. Neka je $-1\leq x\leq 1$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$|16x^5-20x^3+5x|\leq 1.$$

Literatura

[1] B. LAVRIČ, *Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 3.del*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov RS, Ljubljana, 1987.

[2] B. PAVKOVIĆ, B. Dakić, *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[3] B. PAVKOVIĆ, D. Veljan, *Matematika 1, Zbirka zadataka*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[4] V. STOJANOVIĆ, *Matematiskop 3*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[5] I. H. ŠIVANISKIJ, *Teoremi i zadači po algebre i elementarnim funkcijama*, Nauka, Moskva, 1971.