Međunardone matematičke olimpijade

Ilko Brnetić*

Sažetak. *Međunarodna matematička olimpijada koja danas predstavlja svjetsko prvenstvo učenika srednjoškolaca u rješavanju zahtjevnih matematičkih problema bliži se svojoj pedesetoj godišnjici. U ovom članku dan je kratki povijesni pregled, opis natjecanja i osvrt na neka druga matematička natjecanja.*

Ključne riječi: *Međunarodna matematička olimpijada*

International Math Olympics

Abstract. *The International Math Olympics, which today represents the world championship of high-school pupils in solving demanding mathematical problems, is approaching its 50th anniversary. In this paper short historical overview is given, description of competitions and a review of some other mathematical competitions.*

Key words: *International Math Olympics*

Od 1959., kada se u Brašovu, u Rumunjskoj, od 23.7. do 31.7. okupilo 52 srednjoškolca iz 7 europskih država nekadašnjeg "istočnog bloka" na prvom međunarodnom natjecanju iz matematike, pa do danas, kada se od 19.7. do 31.7. ove godine u Vijetnamu na 48.međunarodnoj matematičkoj olimpijadi natjecalo 520 učenika iz 93 države svijeta promijenilo se mnogo toga, ali osnovni oblik, sadržaj i pravila natjecanja ostala su u bitnome ista.

Danas je Međunarodna matematička olimpijada definitivno događaj svjetskih razmjera, s obzirom na broj i raspostranjenost zemalja sudionica. I službena zastava koja kroz brojeve nula i beskonačno obojane u boje svih kontinenata nalikuje olimpijskim krugovima, simbolima sportske olimpijade, to jasno naznačuje. Tek, predstavnici Afrike skromno su zastupljeni (tri države ove godine), za razliku od svih ostalih kontinenata.

U početku je pak to bilo natjecanje država "istočnoeuropskog bloka" (Rumunjska, SSSR, Mađarska, Bugarska, Čehoslovačka, Istočna Njemačka, Poljska) i tadašnje Jugoslavije (početak sudjelovanja 1963. godine) od kojih danas neke u političkom smislu ne postoje, a potom se ono malo po malo proširivalo, kako na države zapadne

*Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, Unska 3, HR-10000 Zagreb, E-mail: Ilko.Brnetic@fer.hr

Europe, tako i na izvaneuropske države. Prva izvaneuropska država sudionica bila je 1964. godine Mongolija, a prva europska država izvan skupine od 8 prije navedenih bila je 1965. Finska. Od 1967. stalno se natječu Ujedinjeno Kraljevstvo i Švedska, a prvi nastup na Olimpijadi bilježe i Francuska i Italija. Nakon Mongolije nove izvaneuropske države se pojavljuju 1974., i to Sjedinjene Američke Države i Vijetnam, i od tada stalno nastupaju. Do 1975. godine matematičke olimpijade bile su organizirane u nekoj od 7 država "istočnoeuropskog bloka" ili tadašnjoj Jugoslaviji. Tek 1976. godine se to mijenja i Olimpijadu organizira Austrija, u Lienzu, s 18 država sudionica. Prvi pokušaj organizacije Olimpijade izvan Europe je propao 1980.godine, kada Mongolija nije uspjela organizirati Olimpijadu. Bila je to jedina godina od 1959. godine do danas kada Olimpijada nije organizirana, a te je godine organizirano nekoliko natjecanja lokalnog karaktera. No, sljedeće, 1981.godine Olimpijada je organizirana izvan Europe, i to u Washingtonu, u Sjedinjenim Američkim Državama, s 27 država sudionica. Nakon povratka u Europu, sljedeći domaćini izvan Europe su Kuba 1987. i Australija 1988., tada već s 49 država sudionica. Novo veliko povećanje broja sudionica nastupa 1993.godine kada u Istanbulu nastupaju 73 države svijeta, po prvi put i Hrvatska. To je najvećim dijelom posljedica nastanka novih država na području bivše Jugoslavije i bivšeg SSSR-a. A broj država sudionica od 1993. godine do danas narastao je još za 20.

Na međunarodnim matematičkim olimpijadama u zadnjih 25 godina svaka država sudionica može sudjelovati sa šest natjecatelja, srednjoškolaca, i dva voditelja, od kojih je jedan predstavnik države u međunarodnom žiriju. Natjecanje se odvija u dva dana, pri čemu učenici svaki dan rješavaju tri zadatka u 4 i po sata vremena i svaki zadatak, bez obzira na težinu, vrijedi jednaki broj bodova, i to sedam. Taj se koncept u osnovi zadržao od početka do danas, uz manje izmjene. Tako je primjerice broj maksimalni natjecatelja jedne države do 1981. godine bio osam, od 1983. godine stalno iznosi šest (1982. je nakratko bio smanjen na samo četiri). Također, na početnim olimpijadama svi zadaci nisu bili jednako vrednovani, a na drugoj i četvrtoj Olimpijadi je broj zadataka bio sedam. No, svakako radi se o nebitnim razlikama.

Puno je veća razlika u težini zadataka. Neki od zadataka s prvih olimpijada i njihove inačice danas možemo primjerice naći i na našim županijskim natjecanjima. Već osamdesetih godina na Olimpijade se javljaju vrlo zahtjevni zadaci, a na ovogodišnoj Olimpijadi su dva zadatka bila toliko zahtjevna da su jednog od njih riješila samo dva, a drugog tek pet (od 520) učenika. Ipak, treba reći da su od početka pa do danas ti zadaci ispitivali kreativnost najsposobnijih mladih matematičara svijeta. Kako su se matematička natjecanja razvijala i širila na sve veći broj država, to je, uz obveznu originalnost zadataka na međunarodnim matematičkim olimpijadama, dovelo do značajnog porasta težine zadataka u današnje vrijeme. Također, treba naglasiti da je teško riješiti zahtjevni originalni zadatak u vrlo kratkom limitiranom vremenu. Iako je takav način rješavanja zadataka posve drugačiji od rada u znanosti, koje prije svega traži sustavnost, snalaženje u literaturi, proučavanje i povezivanje problema, ipak ono ističe najkreativnije mlade matematičare, i to kroz natjecanje, koje je mladim ljudima u pravilu najveća motivacija za napredak. Iako je sasvim jasno da dobar znanstvenik ne mora biti dobar natjecatelj u školskoj dobi, pokazuje se da su mnogi dobri natjecatelji danas izvrsni znanstvenici. Gledano na hrvatskom primjeru, veliki je broj današnjih matematičara znanstvenika koji su kao srednjoškolci bili izvrsni natjecatelji, mnogi od njih sudionici međunarodnih matematičkih olimpijada i dobitnici medalja. U [1] se može, uz pregled zadataka s olimpijada, naći i popis hrvatskih predstavnika na međunarodnim matematičkim olimpijadama.

Zadatke za Olimpijadu predlaže svaka država sudionica, osim domaćina, i to nekoliko mjeseci prije početka Olimpijade. Predloženi zadaci moraju biti originalni, barem prema saznanju predlagača. Pri tome oni moraju biti iz područja elementarne srednjoškolske matematike, a u pravilu se dijele na četiri područja: algebru, geometriju, teoriju brojeva i logičko-kombinatorne zadatke. Na osnovu predloženih zadataka, povjerenstvo sastavljeno uglavnom od predstavnika domaćina odabire 25 do 30 zadataka u uži izbor. Iz tog skupa zadataka međunarodni žiri, sastavljen od voditelja ekipa, bira na početku Olimpijade šest zadataka za natjecanje. Nakon toga svaki voditelj prevodi zadatke na materinji jezik učenika. Kasnije, kod ocjenjivanja voditelji opet prevode učenički rad, u mjeri u kojoj je to potrebno.

Na međunarodnim matematičkim olimpijadama se, zbog želje za motivacijom većeg broja učenika, dodjeljuje veliki broj medalja. Skoro 50 posto učenika (ne smije se prijeći 50 posto) dobiva medalju, a zlatne, srebrne i brončane medalje se dijele u omjeru 1:2:3. Također, svi učenici koji nisu dobili medalju, a potpuno su točno riješili jedan zadatak dobivaju pohvalu. Iako spomenuta pravila nisu bila takva od prve olimpijade, već su dugo u takvom obliku. Pravila za medalje donesena su još dosta rano, a pohvala je uvedena 1988. godine. Uz to, žiri može dodijeliti specijalnu nagradu za izuzetno rješenje nekog zadatka.

Zanimljivo je navesti barem neki primjer zadatka s Olimpijade. Jedan od najpoznatijih primjera svakako je šesti zadatak s Olimpijade 1988. godine, održane u Canberri. Zadatak je predložio prof. Arthur Engel, voditelj ekipe tadašnje Zapadne Njemačke. Zadatak glasi:

Neka su a i b prirodni brojevi takvi da $ab+1$ dijeli a^2+b^2. Dokažite da je $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ kvadrat prirodnog broja.

Nitko od šest članova povjerenstva za izbor zadataka ga nije uspio riješiti, pa je dan na rješavanje četvorici poznatih australskih matematičara, specijalista iz područja teorije brojeva u šest sati vremena. Nitko od njih nije riješio zadatak u tom roku. Ipak, žiri se odlučio postaviti taj zadatak na natjecanju. Jedanaest je učenika riješilo zadatak.

Izložit ću rješenje bugarskog učenika, Emanuela Atanasova, koji je za njega dobio specijalnu nagradu žirija:

Neka je $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$ i pretpostavimo suprotno, da prirodan broj k nije kvadrat prirodnog broja.

Za svako rješenje (a, b) jednadžbe

$$a^2 - kab + b^2 = k, \tag{1}$$

vrijedi da je $a,\, b > 0$ ili $a,\, b < 0$, Naime, očito je $a,\, b \neq 0$, a ako je $ab < 0$, tada je $a^2 - kab + b^2 > k$.

Promotrimo rješenje (a, b) za koje je $a \geq b > 0$ i a minimalno. Kako za $a = b$ imamo $0 \geq (2-k)a^2 = k$, mora biti $b < a$. Promotrimo (1) kao kvadratnu jednadžbu u a. Ona ima dva rješenja a i a_1 i vrijedi $a + a_1 = kb$, pa a_1 mora biti prirodan broj. No, kako je $a_1 = \frac{b^2-k}{a} < \frac{a^2-1}{a} < a$, dobili smo kontradikciju s minimalnošću a.

Time je tvrdnja zadatka dokazana.

Dodatno, prilikom izbora zadataka žiri nastoji odabrati zadatke koji imaju lijepu formulaciju, a rado se izabiru i zadaci čiju formulaciju može shvatiti i nematematičar, makar je rješenje tog zadatka složeno. Navedimo i jedan takav primjer. Radi se o trećem zadatku s Olimpijade u Istanbulu, 1993. godine, koji spada u područje logičko-kombinatornih zadataka:

Na svakom od $n \times n$ polja beskonačne (ili po volji velike kvadratne) ploče nalazi se po jedan žeton. Sa svakim žetonom može se napraviti skok preko drugog žetona na slobodno polje, i to u horizontalnom ili vertikalnom smjeru, pri čemu se preskočeni žeton ukloni. Naći sve vrijednosti n za koje na kraju može ostati samo jedan žeton na ploči.

Iako zadatak spada među zahtjevnije, ipak se ne radi o jednom od težih zadataka u povijesti olimpijada, kao što je to bio slučaj s prije navedenim zadatkom iz teorije brojeva. Zadatak je riješilo 30 učenika, a iznijet ćemo samo ideju rješavanja.

Rješenje je: Za n koji nije djeljiv s 3, to je moguće napraviti, a za n koji je djeljiv s 3 nije.

Za n djeljiv s 3, obojimo polja ploče u tri boje naizmjenično dijagonalno. Na početku je broj žetona na poljima svake od te tri boje jednak (to možete lako provjeriti i sami), a prilikom svakog skoka se broj žetona na poljima jedne boje povećava za 1, a na poljima dvije preostale boje smanjuje za 1, čime je parnost broja žetona na poljima svake od boja u svakom koraku ista, pa ne može na kraju biti različita.

S druge strane za $n = 1$ i $n = 2$, zaključak je trivijalan, a nije teško doći do jednog žetona za $n = 4$ i $n = 5$. U općem slučaju, može se pokazati se ploča s $n \times n$ žetona na kvadratnoj ploči, za $n \geq 7$, može svesti na kvadratnu ploču s $(n-3) \times (n-3)$ žetona (prepuštamo to čitatelju).

Nakon navedenih primjera, slijedi nekoliko riječi o uspješnosti pojedinih država, ponajviše u zadnjih petnaestak godina. Tradicionalno, najviše uspjeha ima Kina, a uz njih i još dvije "velesile" Rusija i SAD. No, zanimljivo je naglasiti da su na tom natjecanju osobito uspješne azijske (ponajviše Južna Koreja, Iran, Tajvan, Vijetnam, Japan) i istočnoeuropske države (ponajviše Bugarska, Rumunjska, Mađarska, Ukrajina, Bjelorusija). Među zapadnoeuropskim državama najuspješnija je Njemačka. U tako jakoj i jako raspostranjenoj konkurenciji nije lako držati korak s ostalima. Hrvatska je najuspješnija bila 1997. i 1998., kada je po broju bodova ekipno bila 24. i 22. država svijeta, ali, čak i uz jedan od najskromnijih ekipnih rezultata poput 46. mjesta ove godine, nalazi se u prvoj polovici država sudionica. Zanimljivo je ipak da još čekamo prvu hrvatsku zlatnu medalju. Najuspješniji su do sada bili osječki matematičar i danas vrhunski znanstvenik, prof. Mladen Bestvina, redoviti profesor na University of Utah, Salt Lake City i Goran Dražić iz Zagreba, trenutno student prve godine na Matematičkom odjelu PMF-a. Oni su svaki osvojili po dvije srebrne i jednu brončanu medalju, prvi od 1976. do 1978., a drugi od 2004. do 2006. godine. Inače, pod [3] se mogu naći statistički podaci o rezultatima na svim matematičkim olimpijadama (stranica je u nastajanju i ima nekih nepotpunosti, ali najvažniji podaci o svakoj održanoj olimpijadi su navedeni).

Sasvim je jasno da samo natjecanje nije jedini sadržaj Olimpijade. Međusobno upoznanavanje kako učenika, tako i voditelja, temelj je njihove buduće suradnje i možda je bitnije od samog natjecanja. A kroz program Olimpijade, koja traje skoro dva tjedna, domaćin se trudi upoznati sve sudionike sa ljepotama i znamenitostima grada i države organizatora natjecanja.

Uz Međunarodnu matematičku olimpijadu, svojevrsno svjetsko prvenstvo učenika srednjoškolaca u rješavanju matematičkih problema, organiziraju se i mnoga regionalna natjecanja, a na dva takva natjecanja sudjeluje i Republika Hrvatska. To su Mediteransko natjecanje (počelo 1998. godine uz sudjelovanje Hrvatske) i Srednjoeuropska matematička olimpijada (počinje ove godine, također uz sudjelovanje naših učenika). Mediteransko natjecanje ne iziskuje velike troškove, jer svaka država organizira sama natjecanje za svoje učenike, ali su zadaci zajednički za sve. Srednjoeuropska matematička olimpijada će s pak organizirati svake godine drugoj državi (ove godine u Eisenstadtu, u Austriji), a sudjeluju tzv. B-reprezentacije, čime se većem broju učenika omogućava sudjelovanje na nekom od prestižnih međunarodnih natjecanja. Treba istaknuti da Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa podržava i financira sve naše aktivnosti vezane uz međunarodna natjecanja. Inače, diljem svijeta održavaju se i druga regionalna natjecanja, a najznačajnija su: Balkanska matematička olimpijada, Baltičko natjecanje, Pan-afrička matematička olimpijada, Ibero-američka matematička olimpijada i Azijsko-pacifička matematička olimpijada. Što se međunarodnih natjecanja tiče vrijedi navesti da hrvatski učenici sudjeluju i na natjecanju Klokan bez granica, namijenjenom širem krugu učenika, a od nedavno učenici iz Zagreba i Rijeke i na prestižnom natjecanju Turnir gradova.

Na kraju recimo da je Međunarodna matematička olimpijada jedna od tzv. "olimpijada znanja" (fizika, kemija, informatika, biologija, zemljopis, astronomija, lingvistika), a među njima se ističe najduljom tradicijom i najvećim brojem sudionika. Jedna od tih olimpijada, i to informatička, se ovog ljeta održava u Hrvatskoj, u Zagrebu, a 2010.godine bi se u Hrvatskoj trebala održati i Olimpijada iz fizike. Također se nadamo i skoroj organizaciji Matematičke olimpijade u Hrvatskoj.

Literatura

[1] Željko Hanjš, *Međunarodne matematičke olimpijade*, Element, Zagreb, 2000.

[2] Arthur Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer, 1998.

[3] `http://www.imo-official.org`