Osječki matematički list 17 (2017), 109-123

Totalna zbrka

Snježana Majstorović[*], Katarina Vincetić[†]

Sažetak

Problem totalne zbrke odnosi se na prebrojavanje deranžmana skupa od n elemenata, odnosno na broj D_n permutacija n-članog skupa koje nemaju fiksnih točaka. Formula za D_n poznata je više od 300 godina, no njena posebnost je u tome što se može izvesti na više različitih načina. Glavni cilj članka je predstaviti problem totalne zbrke te ponuditi nekoliko zanimljivih izvoda formule za broj D_n.

Ključne riječi: *deranžman, permanenta matrice, rekurzija, funkcija izvodnica, formula uključivanja-isključivanja*

Le problème des rencontres

Abstract

Le problème des rencontres deals with counting derangements of a set with n elements, that is, it deals with the number D_n of permutations of an n-element set without fixed points. Formula for D_n is known for more than 300 years, but it is special because of the variety of ways how to derive it. The main goal of this paper is to present the problem of derangements and offer several interesting proofs of the formula for D_n.

Keywords: *derangement, permanent of a matrix, recurrence, generating function, inclusion-exclusion principle*

[*] Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: smajstor@mathos.hr
[†] Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: kvincetic@mathos.hr

1 Uvod

Nikolaus Bernoulli (1687.–1759.), švicarski matematičar.

U kombinatornoj matematici *Problem totalne zbrke* je specijalan slučaj problema pod nazivom *Les problème des rencontres*, u prijevodu *Problem podudaranja*. Postavio ga je francuski matematičar Pierre Rèmond de Montmort (1678.–1719.) 1708. godine u svojoj knjizi [4], a riješio ga je Nikolaus Bernoulli 1711. godine. Problem podudaranja glasi: Treba odrediti broj $D_{n,k}$ svih permutacija skupa $[1..n] := \{1, \dots, n\}$ koje imaju točno k fiksnih točaka. Problem totalne zbrke odnosi se na slučaj $k = 0$, odnosno na određivanje broja $D_{n,0}$. Matematička formulacija takvog problema glasi:
Koliko je permutacija (bijekcija) $f : [1..n] \to [1..n]$ bez fiksnih točaka, tj. takvih da vrijedi $f(i) \neq i, \forall i \in [1..n]$?
Svaku takvu permutaciju zovemo *deranžmanom* pa se $D_{n,0}$ zove broj deranžmana skupa od n elemenata. Pored oznake $D_{n,0}$ koriste se i oznake D_n, d_n, $\Pi(n)$ i $!n$. Oznaku $!n$ koristimo kada želimo istaknuti funkciju *subfaktorijel*. Mi ćemo koristiti oznaku D_n.

Evo jednostavnog primjera:

Primjer 1.1. Četiri studenta A=Ana, B=Boris, C=Cvjetko i D=Dragica pišu test. Profesor želi da studenti jedno drugome ispravljaju testove pri čemu niti jedan student ne smije ispravljati vlastiti test. Na koliko načina profesor može podijeliti testove studentima?

Rješenje. Zanima nas broj D_4 deranžmana skupa od 4 elemenata. Ukupan broj načina na koji profesor može podijeliti testove studentima je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	badc	BCAD	bcda	bdac	BDCA
CABD	cadb	CBAD	CBDA	cdab	cdba
dabc	DACB	DBAC	DBCA	dcab	dcba

Malim slovima su ispisane sve permutacije bez fiksnih točaka. Dakle, profesor na 9 načina može podijeliti testove studentima tako da niti jedan student ne dobije za ispraviti vlastiti test, tj. $D_4 = 9$. ◄

Za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ imamo $D_n = 0, 1, 2, 9, 44, 265, \dots$. Zanima nas zakonitost po kojoj se ponašaju vrijednosti D_n u ovisnosti o n. O tome govori sljedeći teorem:

Teorem 1.1. Broj D_n deranžmana skupa od n elemenata dan je formulom

$$D_n = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \approx \frac{n!}{e},$$

pri čemu je $n! := 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$.

Dokaz ovog teorema možemo provesti na više načina. U radu ćemo navesti neke od najzanimljivijih dokaza i time ukazati na raznolikost i ljepotu tehnikâ za prebrojavanje permutacija bez fiksnih točaka, a koje su razvijene tijekom nekoliko proteklih stoljeća.

2 Dokaz formulom uključivanja - isključivanja

Jedan od najpristupačnijih dokaza teorema 1.1 je onaj koji koristi formulu uključivanja - isključivanja ili kraće FUI. U sljedećem teoremu ćemo predstaviti tu formulu. Napomenimo da ćemo u daljnjem tekstu s $|Y|$ označavati broj elemenata skupa Y.

Teorem 2.1. Neka je S konačan skup i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ neki njegovi podskupovi te neka je $\overline{A}_i = S \setminus A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right| = |S| - \sum |A_i| + \sum \left|A_i \cap A_j\right| - \\ - \sum \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots + (-1)^n \left|A_1 \cap \ldots \cap A_n\right|,\end{aligned}$$

gdje prvu sumu uzimamo po svim elementima skupa $[1..n]$, drugu po svim dvočlanim podskupovima $\{i, j\}$ skupa $[1..n]$, treću po svim tročlanim podskupovima $\{i, j, k\}$ skupa $[1..n]$ itd.

Dokaz ovog teorema čitatelj može pronaći u [6].

Označimo sa S skup svih permutacija skupa $[1..n]$. Tada je $|S| = n!$. Zatim ćemo za $l \in [1..n]$ s A_l označiti skup svih permutacija $\pi \in S$ za koje vrijedi $\pi(l) = l$. Dakle, u skupu A_l se nalaze sve one permutacije od $[1..n]$ kojima je l fiksna točka. Uz ovakve oznake imamo da je

$$D_n = \left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right|,$$

tj. broj deranžmana skupa $[1..n]$ jednak je broju permutacija od $[1..n]$ kojima niti 1 niti 2 ... niti n nije fiksna točka. Sada je jasno kako iskoristiti FUI za dokazivanje teorema 1.1. Za proizvoljan $l \in [1..n]$ vrijedi $|A_l| = (n-1)!$ jer uz fiksan l, preostalih $n-1$ elemenata možemo permutirati na $(n-1)!$ načina. Slično, uz proizvoljne $k, l \in [1..n]$, $k \neq l$ imamo $|A_k \cap A_l| = (n-2)!$

s obzirom da u ovom slučaju brojimo sve permutacije kojima su i l i k fiksne točke. Općenito, za proizvoljnu neuređenu m-torku $\{l_1, l_2, l_3, \ldots, l_m\} \subseteq [1..n]$, a takvih je $\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} =: \binom{n}{m}$, vrijedi da je

$$\left|A_{l_1} \cap A_{l_2} \cap \ldots \cap A_{l_m}\right| = (n-m)!.$$

Imamo

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)! \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!} \\ &= n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}, \end{aligned}$$

pri čemu uzimamo da je $0! = 1$.

3 Dokaz pomoću rekurzije

U ovom odjeljku ćemo pokazati da se broj D_n deranžmana n-članog skupa može dobiti rekurzivno, a zatim ćemo pokazati kako riješiti dobivenu rekurziju.

Sve permutacije bez fiksnih točaka skupa $[1..n]$ podijelit ćemo u dva podskupa, A i B. Za svaki $j \in [1..n-1]$ neka je A_j skup takvih permutacija π za koje je $\pi(n) = j$ i $\pi(j) = n$, i neka je B_j skup onih permutacija π' za koje je $\pi'(n) = j$ i $\pi'(j) \neq n$. Tada je $|A_j| = D_{n-2}$ jer nakon što se n preslika u j te j u n, ostaje još $n-2$ elementa koje treba permutirati bez da se ijedan preslika u sama sebe, dakle na D_{n-2} načina.
Slično je $|B_j| = D_{n-1}$ jer kada se n preslika u j, ostaju bijekcije bez fiksnih točaka skupa $[1..n-1]$ na skup $[1..n] \setminus \{j\}$, pa zamjenom j sa n vidimo da je taj broj jednak broju permutacija bez fiksnih točaka skupa $[1..n-1]$, dakle broju D_{n-1}.
Kako su svih $2(n-1)$ skupova A_j i B_k, $j,k \in [1..n-1]$, međusobno disjunktni, to su i skupovi $A := \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$ i $B := \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$ disjunktni, i skup svih permutacija bez fiksnih točaka skupa $[1..n]$ jednak je $A \cup B$. Nadalje,

$|A| = (n-1)D_{n-2}$ i $|B| = (n-1)D_{n-1}$ pa dobivamo sljedeću rekurziju za brojeve D_n:

$$\begin{cases} D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), & n \geq 3 \\ D_1 = 0, \ D_2 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Ova rekurzija pripada klasi linearnih rekurzija s varijabilnim koeficijentima pa za nju nemamo elegantan postupak rješavanja kao što ga imamo za linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima. Ipak, uz malo snalažljivosti, nije teško doći do rješenja.

Ako od lijeve i desne strane jednadžbe (1) oduzmemo nD_{n-1}, dobivamo

$$D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}).$$

Supstitucijom $a_n = D_n - nD_{n-1}$ zadanu rekurziju pretvaramo u linearnu homogenu rekurziju s konstantnim koeficijentima

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} = 0, & n \geq 3 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

koju rješavamo tako da joj najprije pridružimo karakterističnu jednadžbu $\lambda^n + \lambda^{n-1} = 0$ čije je rješenje $\lambda = -1$. Iz početnog uvjeta dobivamo $a_n = (-1)^n$, odnosno

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n, \ n \geq 2. \tag{2}$$

Dijeljenjem (2) s $n!$ dobivamo

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{2!} - \frac{D_1}{1!} &= \frac{1}{2!} \\ \frac{D_3}{3!} - \frac{D_2}{2!} &= \frac{-1}{3!} \\ &\vdots \\ \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{D_{n-2}}{(n-2)!} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} &= \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Sumiranjem svih $n-1$ jednakosti dobivamo

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_1}{1!} = \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i}{i!},$$

tj.

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}, \; n \geq 1$$

i gotovi smo!

4 Dokaz pomoću eksponencijalne funkcije izvodnice

Jedan od najmoćnijih alata u rješavanju raznih kombinatornih problema su funkcije izvodnice. Za prebrojavanje permutacija koristimo eksponencijalnu funkciju izvodnicu. Najprije ćemo ju definirati, a onda pokazati kako ju koristiti u izvodu formule za broj deranžmana.

Definicija 4.1. Za niz $(a_n)_{n\geq 0}$ pridružena eksponencijalna funkcija izvodnica je suma formalnog reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Istaknut ćemo jedno važno svojstvo funkcija izvodnica koje će nam trebati prilikom izvoda formule za D_n:

Ako je $E_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ i $E_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$, onda vrijedi

$$(E_1 \cdot E_2)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k b_{n-k}}{n!} x^n. \tag{3}$$

Eksponencijalna funkcija izvodnica pridružena nizu D_n je

$$E(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n.$$

Skup svih permutacija skupa $[1..n]$ možemo particionirati u podskupove P_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ tako da skup P_k čine sve permutacije koje imaju točno k

fiksnih točaka. S obzirom da za $k \leq n-1$ vrijedi $|P_k| = D_{n-k}$, imamo

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}, \tag{4}$$

pri čemu dogovorno uzimamo $D_0 := 1$. Množenjem jednakosti (4) s $\frac{x^n}{n!}$ dobivamo

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{D_{n-k}}{n!} x^n.$$

Slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{D_{n-k}}{n!} x^n,$$

odnosno

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{D_{n-k}}{n!} x^n. \tag{5}$$

Koristeći svojstvo (3), desnu stranu jednakosti (5) možemo zapisati ovako:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n \right)$$

pa dobivamo analitički izraz za funkciju E:

$$E(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Preostaje nam razviti E u red kako bismo odredili koeficijent D_n uz $\frac{x^n}{n!}$:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Slijedi

$$D_n = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

5 Deranžmani i permanente $(0,1)$-matrica

U ovom odjeljku ćemo uspostaviti lijepu vezu između kombinatorike i linearne algebre koja vodi do formule za D_n.
Determinanta je funkcija kvadratne matrice koja zauzima iznimno mjesto u linearnoj algebri. Za matricu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determinantu $\det(A)$ definiramo s

$$\det(A) = \sum_{\pi\in S} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)},$$

pri čemu je S skup svih permutacija skupa $[1..n]$, dok je $\operatorname{sgn}(\pi)$ predznak permutacije π [2].
Permanentu $\operatorname{per}(A)$ matrice A definiramo slično kao i determinantu, ali izostavljamo alternaciju predznaka, odnosno vrijedi

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\pi\in S} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

Tako npr. za matricu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ vrijedi

$$\operatorname{per}(A) = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21},$$

a za matricu $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ imamo

$$\operatorname{per}(B) = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} + b_{13}b_{22}b_{31}.$$

Determinante i permanente matrica su specijalni slučajevi imananti. Iako se u ovom članku ne bavimo imanantom matrice, zbog zanimljivosti tog pojma i činjenice da se isti ne obrađuje na preddiplomskom i/ili diplomskom studiju matematike, mi ćemo mu ipak navesti definiciju:

Definicija 5.1. Neka je $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ particija prirodnog broja n i neka je χ_λ karakter simetrične grupe $S_n = ([1..n], *)$ [1], odnosno grupe svih permutacija skupa $[1..n]$ uz operaciju $*$ kompozicije funkcija. Imananta kvadratne matrice A reda n pridružena karakteru χ_λ definirana je s

$$\operatorname*{imm}_{\lambda}(A) = \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \chi_\lambda(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

[1] Karakter simetrične grupe $S_n = ([1..n], *)$ je svako preslikavanje $f : S_n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvo da je $f(a*b) = f(a)f(b)$ za sve a, b iz S_n.

Sada je jasno da u slučaju $\chi_\lambda(\pi) = \mathrm{sgn}(\pi)$ imamo determinantu, a u slučaju $\chi_\lambda(\pi) = 1$ imamo permanentu matrice A.
Vratimo se na permanente i na njihovo značenje u kombinatorici. Iako se permanenta smatra složenijim matematičkim pojmom od determinante, neka njena svojstva su slična, a neka se čak i podudaraju sa svojstvima determinante. Primjerice, Laplaceov razvoj determinante po određenom retku ili stupcu vrijedi i u slučaju permanenti, jedino treba izostaviti promjene predznaka. U nastavku ćemo navesti još jedno svojstvo permanenti koje će nam koristiti u izvodu formule za D_n.

Za kvadratne matrice A i B reda n vrijedi

$$\mathrm{per}(A+B) = \sum_{S,T\subseteq[1..n]} \mathrm{per}(A_{(S,T)})\,\mathrm{per}(B_{(\overline{S},\overline{T})}), \tag{6}$$

pri čemu je $|S| = |T|$, $\overline{S} = [1..n] \setminus S$, $\overline{T} = [1..n] \setminus T$, a matrice $A_{(S,T)}$ i $B_{(\overline{S},\overline{T})}$ su redom podmatrice od A i B s redcima definiranim skupom indeksa S, odnosno $\overline{S}$ i stupcima skupom indeksa T, odnosno $\overline{T}$. Dokaz ove tvrdnje čitatelj može pronaći u [1].

Permanente $(0,1)$-matrica, tj. onih matrica čiji elementi dolaze iz skupa $\{0,1\}$, imaju veliki značaj u kombinatorici i diskretnoj matematici jer predstavljaju rješenja mnogih problema opisanih pomoću tih matrica. Jednoj vrsti takvih problema pripada i prebrojavanje permutacija n-članog skupa bez fiksnih točaka.
Ako definiramo kvadratnu matricu $B = (b_{ij})$ reda n na sljedeći način:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{permutacija smije preslikati } i \text{ u } j \\ 0, & \text{permutacija ne smije preslikati } i \text{ u } j, \end{cases}$$

onda permanenta $\mathrm{per}(B)$ matrice B odgovara broju svih permutacija skupa $[1..n]$ koje ispunjavaju zadane uvjete. Prema tome, ako želimo prebrojati sve permutacije bez fiksnih točaka, onda definiramo matricu $A = (a_{ij})$ reda n ovako:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

odnosno, A na glavnoj dijagonali ima nule, a na svim ostalim mjestima ima jedinice. Možemo pisati $A = J_n - I_n$, pri čemu je J_n kvadratna matrica reda n čiji su svi elementi jedinice, a I_n je jedinična matrica reda n. Dokažimo da vrijedi $\mathrm{per}(A) = D_n$.
Koristeći svojstvo (6) dobivamo

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{per}(J_n - I_n) = \sum_{S,T\subseteq[1..n]} \mathrm{per}(J_{n(S,T)})\,\mathrm{per}(-I_{n(\overline{S},\overline{T})}). \tag{7}$$

Uočimo da $\mathrm{per}(J_n)$ zadovoljava istu rekurziju kao i faktorijeli, tj. vrijedi

$$\begin{cases} \mathrm{per}(J_n) = n \cdot \mathrm{per}(J_{n-1}), & n \geq 2 \\ \mathrm{per}(J_1) = 1 \end{cases}$$

pa je $\mathrm{per}(J_n) = n!$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, za proizvoljne jednakobrojne skupove S i T kardinalnosti k imamo da je $\mathrm{per}(J_{n(S,T)}) = k!$. Ovo je jasno i bez korištenja rekurzije. Ako je kvadratna matrica A reda n cijela sastavljena od jedinica, onda za svaki par $i, j \in [1..n]$ vrijedi da se i smije preslikati u j i obrnuto. Dakle, $\mathrm{per}(A)$ predstavlja ukupan broj permutacija od $[1..n]$, a takvih je $n!$. Nadalje, valja primijetiti kako je $\mathrm{per}(-I_{n(\overline{S},\overline{T})}) = (-1)^{n-k}$ ako i samo ako je $\overline{S} = \overline{T}$. U svim ostalim slučajevima ta je permanenta jednaka nuli. Stoga sumi u (7) doprinose samo oni parovi skupova S, T koji se podudaraju.
Dobivamo

$$\begin{aligned} \mathrm{per}(A) &= \sum_{S,T \subseteq [1..n]} \mathrm{per}(J_{n(S,T)})\,\mathrm{per}(-I_{n(\overline{S},\overline{T})}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!(-1)^{n-k} \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \end{aligned}$$

pa smo pokazali da vrijedi $\mathrm{per}(A) = D_n$.

6 Ocjena broja D_n

Sada kada znamo razne načine za pronalaženje broja deranžmana n-članog skupa, jasno je da je sumu

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \tag{8}$$

lako računati jedino za malene n. Već za $n = 7$ imamo da je $D_7 = 1854$, dok je $D_8 = 14833$. Za velike brojeve n htjeli bismo znati nešto o D_n bez računanja sume, tj. htjeli bismo ocijeniti broj D_n i vidjeti koliki je udio broja permutacija bez fiksnih točaka u broju svih permutacija n-članog skupa.

Suma u (8) podsjeća na početak Taylorovog reda funkcije $f(x) = e^x$ u okolini točke $x_0 = 0$

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

koji za $x = -1$ izgleda ovako:

$$e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

S obzirom da je suma (8) konačna, broj e^{-1} može poslužiti pri aproksimaciji broja D_n i točnost aproksimacije bit će to veća što je veći n. Imamo

$$e^{-1} \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!},$$

odnosno

$$D_n \approx n! \cdot e^{-1} = \frac{n!}{e}. \tag{9}$$

Primjerice, znamo da je $D_6 = 265$, a naša procjena daje

$$\frac{6!}{e} = 264.8731 \approx 265.$$

U sljedećim tablicama prikazane su vrijednosti broja D_n i $n!$ za neke n te je prikazan udio broja D_n u broju svih permutacija i obrnuto:

n	D_n	$n!$
2	1	2
3	2	6
4	9	24
5	44	120
6	265	720
7	1854	5040
8	14833	40320
9	133496	362880
10	1334961	3628800
11	14684570	39916800
12	176214841	479001600
13	2290792932	6227020800
14	32071101049	87178291200
15	481066515734	1307674368000
16	7697064251745	20922789888000
17	130850092279664	355687428096000
18	2355301661033953	6402373705728000
19	44750731559645106	121645100408832000
20	895014631192902121	2432902008176640000
21	18795307255050944540	51090942171709440000
22	$\approx 4.13497 \times 10^{20}$	$\approx 1.12400 \times 10^{21}$
23	$\approx 9.51043 \times 10^{21}$	$\approx 2.58520 \times 10^{22}$
24	$\approx 2.28250 \times 10^{23}$	$\approx 6.20448 \times 10^{23}$
25	$\approx 5.70626 \times 10^{24}$	$\approx 1.55112 \times 10^{25}$

Tablica 1: Brojevi D_n i $n!$ za $2 \leq n \leq 25$.

n	$D_n/n! \approx$	$n!/D_n \approx$
2	= 0.5	= 2
3	0.33333333333333	= 3
4	= 0.375	2.66666666666667
5	0.36666666666667	2.72727272727273
6	0.36805555555556	2.71698113207547
7	0.36785714285714	2.71844660194175
8	0.36788194444444	2.71826333176026
9	0.36787918871252	2.71828369389345
10	0.36787946428571	2.71828165766640
11	0.36787943923361	2.71828184277783
12	0.36787944132128	2.71828182735187
13	0.36787944116069	2.71828182853849
14	0.36787944117216	2.71828182845373
15	0.36787944117140	2.71828182845938
16	0.36787944117145	2.71828182845903
17	0.36787944117144	2.71828182845905
18	0.36787944117144	2.71828182845905
19	0.36787944117144	2.71828182845905
20	0.36787944117144	2.71828182845905
21	0.36787944117144	2.71828182845905
22	0.36787944117144	2.71828182845905
23	0.36787944117144	2.71828182845905
24	0.36787944117144	2.71828182845905
25	0.36787944117144	2.71828182845905

Tablica 2: Omjeri brojeva D_n i $n!$ za $2 \leq n \leq 25$.

Zbog aproksimacije (9) jasno je da se povećanjem broja n omjer ukupnog broja permutacija n-članog skupa i broja permutacija bez fiksnih točaka približava broju e. Obrnuti omjer nam govori da u skupu svih permutacija n-članog skupa otprilike jednu trećinu zauzimaju permutacije bez fiksnih točaka.

7 Poopćenje problema totalne zbrke

Kao što smo spomenuli u uvodu, problem totalne zbrke je specijalan slučaj problema podudaranja. *Rencontres* brojevi su brojevi koji za $0 \leq k \leq n$ daju odgovor na pitanje koliko je permutacija n-članog skupa koje imaju

k fiksnih točaka. Kažemo i da se radi o *parcijalnim deranžmanima*, a njihov broj označavamo s $D_{n,k}$. Za $k = 0$ imamo problem deranžmana. U sljedećoj tablici su prikazani *rencontres* brojevi za neke n i $k = 0, 1, \dots, n$:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1						
2	1	0	1					
3	2	3	0	1				
4	9	8	6	0	1			
5	44	45	20	10	0	1		
6	265	264	135	40	15	0	1	
7	1854	1855	924	315	70	21	0	1

Tablica 3: *Rencontres* brojevi za $n = 1, \dots, 7$ i $0 \leq k \leq n$.

Vrijedi formula

$$D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k},$$

jer imamo $\binom{n}{k}$ načina na koje možemo birati k elemenata iz n-članog skupa koji će biti fiksni pri svakoj permutaciji. Nakon što odaberemo te elemente, ostale elemente ne smijemo preslikati u same sebe pa nam ostaje još D_{n-k} permutacija, pa formula (8) za D_{n-k} daje eksplicitnu formulu za *rencontres* brojeve

$$D_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

8 Zaključak

Za kraj ćemo navesti vrlo pojednostavljen opis deranžmana:

"Deranžman je razmještaj u kojem ništa nije na svom mjestu!"

Literatura

[1] Yu.V. Borovskikh, V.S. Korolyuk, *Random permanents*, VSP BV, Utrecht, The Netherlands, 1994.

[2] T.W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[3] H. Minc, *Permanents of* $(0, 1)$*-circulants*, Canad. Math. Bull. 7 (1964), 253–263.

[4] P.R. Montmort, *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, Paris, 1708.

[5] I. Nakić, *Diskretna matematika*, Predavanja, ak.godina 2011/2012, PMF, Matematički odsjek, Zagreb.

[6] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[7] H.S. Wilf, *Generating Functionology*, Academic Press, 1994.