

# USPOREDBA ANALITIČKOG I NUMERIČKOG PRORAČUNA VITKIH PLOČA ZA MEĐUDJELOVANJA SILA U RAVNINI I OKOMITO NA RAVNINU MODELA

## COMPARISON OF THE ANALYTICAL AND THE NUMERICAL COMPUTATIONS OF THE SLENDER PLATES SUBJECTED TO THE INTERACTION OF IN- PLANE AND OUT-OF-PLANE FORCES

Lidija Gros\*, Dragan Ribarić\*\*

### Sažetak

*U ovom radu prikazan je proračunski model geometrijske nelinearnosti ravnih tankih plošnih konstrukcija izvan svoje ravnine, a za istovremena djelovanja u ravnini i okomito na nju. Najprije je opisana teorijska osnova proračunskog modela (teorija 2. reda) izvedena iz ravnotežnih, konstitutivnih i kinematičkih jednadžbi, a potom je prikazan numerički postupak za opće rješenje problema. Numerički postupak koristi metodu konačnih elemenata i slobodni software FEAP (Finite Element Analysis Program, Univesity of California at Berkeley), u koji je nadograđen vlastiti kod i koji numeričkom iteracijom omogućava rješavanje različitih ravninskih primjera stabilnosti ploča prikazanih o ovom radu.*

**Ključne riječi:** stabilnost ravnih ploča, teorija 2. reda, metoda konačnih elemenata, vezana interpolacija, program FEAP, numerička iteracija

### Abstract

*In this work the numerical model for the out-of-plane geometrical nonlinearity of thin plane structures, subjected to the in-plane and the out-of-plane actions, is presented. First the large deformation theory was developed from the equilibrium, constitutive*

---

\* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci  
E-mail: gros.lidija00@gmail.com

\*\* Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci  
E-mail: [dragan.ribaric@uniri.hr](mailto:dragan.ribaric@uniri.hr)

and kinematic problem conditions and then the numerical procedure for the general solution of the model was described. The procedure uses the finite element method implemented in the free software FEAP (Finite Element Analysis Program, University of California at Berkeley), in which our own code was incorporated using an iterative numerical procedure for solving problems of stability for generally-loaded flat thin plates. Some numerical examples are presented in this work.

**Key words:** stability of flat plates, large deformation theory, finite element method, linked interpolation, FEAP program, numerical iteration

## 1. Uvod

Ovaj je rad skraćeni prikaz diplomskog rada [1] autorice\*, čiji je cilj istražiti mogućnosti numeričke analize metodom konačnih elemenata za probleme geometrijske nelinearnosti plošnih nosača opterećenih u ravnini i okomito na nju [2] i [3]. Pritom se željelo iskoristiti dobra svojstva već razvijenih konačnih elemenata za ravne ploče [4] i [5], te mogućnosti koje pruža otvoreni akademski programski paket FEAP (Finite Element Analysis Program, University of California at Berkeley).

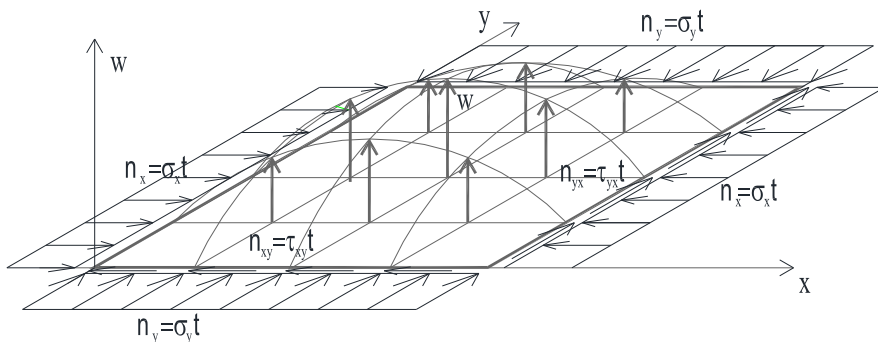
## 2. Analitičko rješenje tankih ploča s membranskim silama

Za tanku ploču debljine  $t$  i materijalnih veličina  $E$  i  $\nu$  (modula elastičnosti i Poissonova koeficijenta), opterećenu podijeljenim transverzalnim opterećenjem  $q(x,y)$ , diferencijalna jednadžba glasi [2]:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -q(x, y), \quad (1)$$

pri čemu je  $w=w(x,y)$  transverzalni pomak točke srednje ravnine ploče s koordinatama  $(x,y)$ , a  $D$  je savijajuća krutost ploče:

$$D = \frac{Et^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}. \quad (2)$$



**Slika 1.** Model ploče, transverzalni pomaci i membranska naprezanja

Ako je ploča istovremeno opterećena membranskim napreznjima,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  (sl. 1), diferencijalna jednačnja ima prošireni oblik [2], [3]:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot t = -q(x, y), \quad (3)$$

Simboli  $n_x = \sigma_x \cdot t$ ,  $n_{xy} = \tau_{xy} \cdot t$  i  $n_y = \sigma_y \cdot t$  na Slici 1 označavaju membranske sile po jedinici duljine i širine ploče ( $N/m$ ).

Diferencijalna jednačnja tog oblika nije više linearna jer krutost ploče postaje ovisna o membranskim silama i derivacijama pomaka, koje su i nepoznanice u toj jednačnji. Stoga se uz donju transformaciju, membranski dio može interpretirati kao dodatno podijeljeno opterećenje:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -q - \Delta \bar{q}, \quad (4)$$

s ekvivalentnim dodatnim opterećenjem:

$$\Delta \bar{q} = \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot t. \quad (5)$$

Diferencijalna jednačnja ovog oblika se za neki rubni problem može riješiti iterativno. Pomaci za stvarno poprečno opterećenje se odrede iz (1), a za izračunane pomake i poznate rubne uravnotežene membranske sile  $n_x$ ,  $n_y$  i  $n_{xy} = n_{yx}$  se izračuna ekvivalentno dodatno opterećenje  $\Delta \bar{q}$  iz (5) i

pribroji stvarnom opterećenju u (4). S korigiranim silama izračunaju se ispravljani pomaci i tako u krug. Postupak će konvergirati k točnom rješenju diferencijalne jednadžbe (3) uz dovoljan broj koraka koji će ovisiti o razini vrijednosti membranskih sila u odnosu na kritične sile.

### 3. Konačni elementi ploča i vezana interpolacija

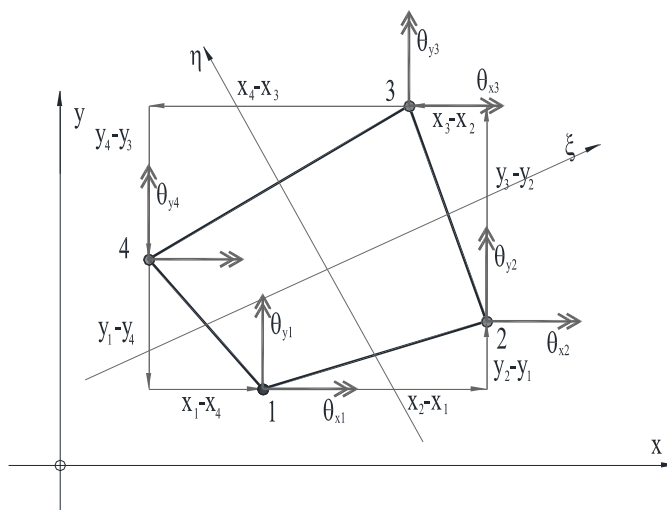
Kao konačni elementi koji su u stanju modelirati ploče i po Mindlinovoj teoriji umjereno debelih ploča i po Kirchhoff-Loveovoj teoriji tankih ploča, kao krajnjem stanju te prve teorije, razvijeni su elementi s vezanom interpolacijom polja pomaka i polja rotacija. U [4] i [5] predložen je oblik vezane interpolacije za polje transversalnog pomaka  $w$  zajedno s običnom Lagrangeovom interpolacijom polja rotacija presjeka  $\theta_x$  i  $\theta_y$  oko globalnih koordinatnih osi na konačnom elementu najnižeg reda, elementu s četiri čvora i dvanaest stupnjeva slobode (po tri za svaki čvor), koji nosi oznaku Q4-U2 (Slika 2):

$$\theta_x = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \theta_{x,1} + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \theta_{x,2} + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \theta_{x,3} + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \theta_{x,4} \quad (6)$$

$$\theta_y = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \theta_{y,1} + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \theta_{y,2} + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \theta_{y,3} + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \theta_{y,4} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} w = & \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} w_1 + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} w_2 + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} w_3 + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} w_4 + \\ & + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1-\eta}{2} \frac{1}{2} [(\theta_{y2} - \theta_{y1})(x_2 - x_1) - (\theta_{x2} - \theta_{x1})(y_2 - y_1)] + \\ & + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1+\eta}{2} \frac{1}{2} [(\theta_{y3} - \theta_{y4})(x_3 - x_4) - (\theta_{x3} - \theta_{x4})(y_3 - y_4)] + \\ & + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta^2}{4} \frac{1}{2} [(\theta_{y3} - \theta_{y2})(x_3 - x_2) - (\theta_{x3} - \theta_{x2})(y_3 - y_2)] + \\ & + \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta^2}{4} \frac{1}{2} [(\theta_{y4} - \theta_{y1})(x_4 - x_1) - (\theta_{x4} - \theta_{x1})(y_4 - y_1)] + \\ & + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1-\eta^2}{4} w_{B0} \end{aligned} \quad (8)$$

U tome osnovnom obliku za vezanu interpolaciju četveročvornog elementa upotrijebljen je potpuni razvijeni polinom drugog reda za interpolaciju pomaka unutar domene četverostraničnog elementa (9 članova Pascalova trokuta). Svi čvorni parametri  $w_1, \dots, w_4, \theta_{x1}, \dots, \theta_{x4}, \theta_{y1}, \dots, \theta_{y4}$ , zajedno s još jednim internim parametrom označenim s  $w_{B0}$  uključeni su u izraze (6)-(8). Varijable  $\xi$  i  $\eta$  definirane su na prirodnoj domeni elementa u rasponima od  $-1$  do  $+1$  (Slika 2).



**Slika 2.** Četveročvorni konačni element Q4-U2, rotacijski stupnjevi slobode, globalni i prirodni koordinatni sustavi

Tako formirani element Q4-U2 sposoban je proći standardni „patch test“ za konstantno stanje savijanja potpuno točno u svim čvorovima i točkama integracije. Takva se interpolacija može opisati kao potpuna kvadratna forma. Komfornost je sa susjednim elementima pritom zadovoljena uzduž svake stranice elementa jer su interpolacije uzduž stranice opisane samo pripadajućim čvornim stupnjevima slobode te stranice i gdje je deformacija smicanja konstantna i također izražena parametrima te stranice (kontinuitet deformacije smicanja).

Konačni element na osnovi vezane interpolacije pomaka i rotacija Q4-U2 ugrađen je u otvoreni programski paket FEAP (Finite Element Analysis Program, University of California at Berkeley) kao korisnička rutina te su s pomoću njega numerički modelirani neki tipični primjeri iz literature.

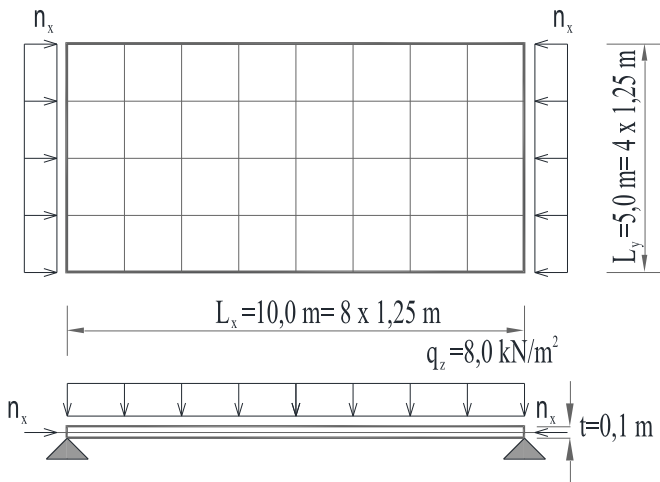
#### 4. Numerički modeli ploča

Ovdje će se prikazati tri primjera modela ploča proračunanih uz pomoć programa FEAP te će ih se usporediti s analitičkim rješenjima. Svi su primjeri modeli vrlo tankih ploča analizirani za efekte teorije drugog reda. Poprečno opterećenje prouzrokuje početnu linearnu deformaciju modela ploče potrebnu da tlačne membranske sile ostvare efekte geometrijske nelinearnosti. Promatrat će se broj iteracija postupka potrebnih za doseganje numeričkog rješenja jednadžbe kao i ostvarena točnost u usporedbi s poznatim analitičkim rješenjima. Također, membranske će se

sile kod svakog primjera povećavati i promatrat će se numerička stabilnost postupka s približenjem kritičnom opterećenju.

#### 4.1. Slobodno oslonjena ploča kao tlačno opterećeni linijski nosač

Zadan je model pravokutne ploče pridržane po  $y$ -rubu i slobodan po  $x$ -rubu (Slika 3) s danom geometrijom i opterećenjem. Ploča je opterećena jednolikim opterećenjem intenziteta  $q_z = 8,0 \text{ kN/m}^2$  okomito na svoju ravninu preko cijele površine, kao inicijalnim djelovanjem i kontinuiranim tlačnim membranskim opterećenjem  $n_x$  po  $y$ -rubovima. Poissonov koeficijent iznosi  $\nu = 0,0$  (kako bi model 2D bio ekvivalentan linijskom, štapnom modelu), modul elastičnosti iznosi  $E = 10,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ . Promatraju se kontrolne deformacijske vrijednosti kao i kontrolni moment savijanja s porastom tlačnoga membranskog opterećenja  $n_x$  i njegovim približavanjem kritičnoj sili.



Slika 3. Model ploče kao linijski nosač širine  $L_y$

Pod takvim uvjetima poprečni pomaci u smjeru  $y$  imaju jednake vrijednosti u svim čvornim točkama pri istom  $x$ , tj. model oponaša gredni sustav i mogu se primijeniti analitička rješenja ravnog štapa. Za slobodno oslonjenu gredu opterećenu kontinuiranim opterećenjem vrijede početne vrijednosti pomaka na sredini raspona, kuta zaokreta presjeka uz oslonac i najvećeg momenta savijanja, također, na sredini raspona:

$$v_0 = \frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{8,0 \cdot 10,0^4}{10 \cdot 10^7 \cdot \frac{1,0 \cdot 0,1^3}{12}} = 0,125 \text{ m} , \quad (9)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{24} \cdot \frac{qL^3}{EI} = \frac{1}{24} \cdot \frac{8,0 \cdot 10,0^3}{10 \cdot 10^7 \cdot \frac{1,0 \cdot 0,1^3}{12}} = 0,040 \text{ rad} , \quad (10)$$

$$M_{L/2} = \frac{qL^2}{8} = \frac{8,0 \cdot 10,0^2}{8} = 100,0 \text{ kNm} / \text{m}' . \quad (11)$$

Također, postoji zatvoreno analitičko rješenje po teoriji drugog reda za poznatu tlačnu silu  $n_x$  [3]. U Tablici 1 dane su točne analitičke vrijednosti kontrolnih parametara u ovisnosti o veličini tlačne sile u štapu, sve do prve kritične sile  $n_{cr}$ :

$$n_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{3,14^2}{10,0^2} \cdot 10 \cdot 10^7 \cdot \frac{1,0 \cdot 0,1^3}{12} = 822,467 \text{ kN} / \text{m}' , \quad (12)$$

**Tablica 1.** Točne analitičke veličine pomaka i momenta savijanja na sredini raspona te rotacije presjeka na osloncima za tlačnu silu iz modela sa Slike 3

$n_x \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}'} \right)$	$\omega = L \sqrt{\frac{S}{EI}} \text{ (rad)}$	$w_{L/2} \text{ (m)}$	$\varphi_0 \text{ (rad)}$	$M_{L/2} \left( \frac{\text{kNm}}{\text{m}'} \right)$
0	0	0,125	0,040	100,0
100	1,095445	0,142362	0,045643	114,236
200	1,549193	0,165304	0,052680	133,061
300	1,897366	0,197030	0,062657	159,109
400	2,190890	0,243780	0,077354	197,512
500	2,449489	0,319529	0,101162	259,765
600	2,683281	0,463384	0,146366	378,031
700	2,898275	0,842181	0,265379	689,527
800	3,0098386	4,59307	1,144377	3774,46
822,467	3,141592	$\infty$	$\infty$	$\infty$

U programu s konačnim pločastim elementima model je raščlanjen na  $8 \times 4$  pravilna kvadratna elementa i opterećen čvornim silama. U svakom su sljedećem proračunu membranske sile povećavane i registriran je potreban broj iteracija za izračun središnjega transverzalnog pomaka tako da se dvije uzastopne iteracije vrijednosti pomaka razlikuju samo u četvrtom decimalnom mjestu. U Tablici 2 dani su navedeni kontrolni parametri, te se mogu usporediti s analitičkim iz Tablice 1 – pomak i moment savijanja na sredini raspona te kut rotacije uz oslonac.

U Tablici 2 postupak je zaustavljen pri  $n_x = 800 \text{ kN} / \text{m}'$  za dani model ploče jer je broj iteracija premašio 50, a kontrolirana preciznost na

središnjem pomaku nije dosegnuta (podudaraju se znamenke na trećoj decimaloj poziciji u 50. iteraciji).

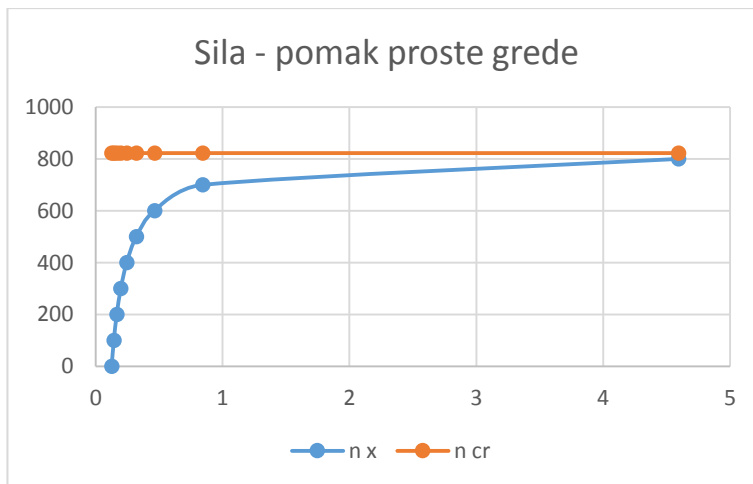
**Tablica 2.** Izračunane veličine pomaka i momenta savijanja u sredini raspona te rotacije presjeka na osloncima za tlačnu silu u modelu sa Slike 3 te potreban broj iteracija  $n$

$n_x \left(\frac{kN}{m'}\right)$	$w_{\frac{L}{2}} (m)$	$\varphi_0 (rad)$	$M_{\frac{L}{2}} \left(\frac{kNm}{m'}\right)$	Broj iteracija $n$
0	0,123466	0,039980	97,9172	3
100	0,140361	0,045361	111,601	10
200	0,162595	0,052441	129,619	10
300	0,193166	0,062172	154,403	10
400	0,237870	0,076399	190,659	15
500	0,309408	0,099161	248,697	20
600	0,441733	0,141256	356,08	20
700	0,765083	0,244108	618,53	25
800	2,707718	0,861976	2195,46	50

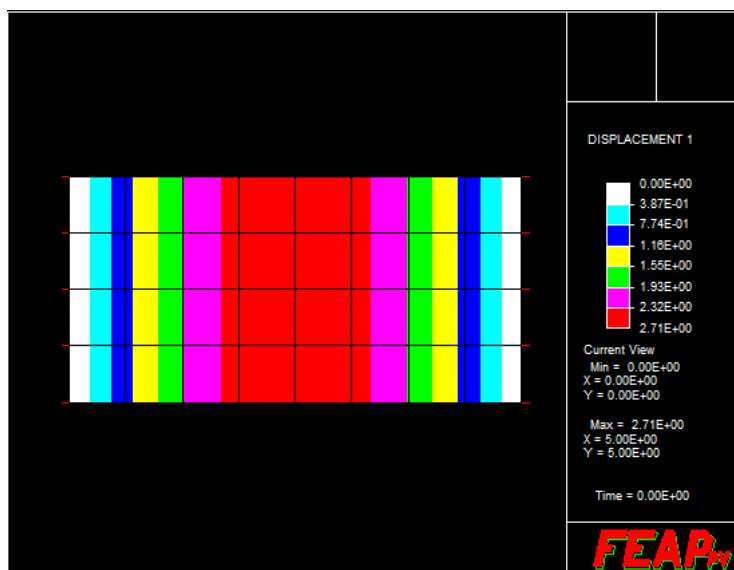
Kada se sila  $n_x$  počne približavati kritičnoj, pomaci naglo rastu (Slika 4), kao i broj potrebnih iteracija. Krajnja, kritična sila ne može se dosegnuti jer proračunski model postaje nestabilan. Može se tek zaključiti da je naglo povećanje broja potrebnih iteracija naznaka da se numerički proračun približio kritičnoj sili.

Za proračun konačne kritične sile bilo bi potrebno provesti račun vlastitih vrijednosti krutosti sustava, što ovdje opisani iterativni postupak ne omogućava.





**Slika 4.** Grafički prikaz porasta sile  $n_x$  i pomaka  $w_{l/2}$  iz Tablice 2

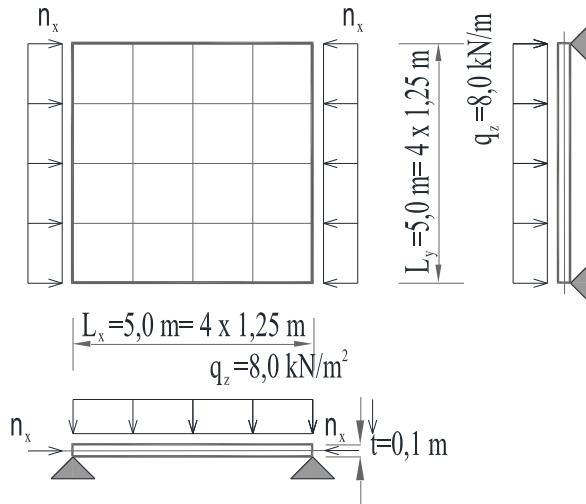


**Slika 5.** Grafički prikaz pomaka ploče iz primjera 1 za  $n_x = 800 \text{ kN/m}'$

Programom FEAP mogu se i grafički prikazati dobiveni rezultati, pa je na Slici 5 prikazan graf pomaka modela za najveću normalnu silu iz Tablice 2.

#### 4.2. Kvadratna tanka ploča slobodno oslonjena na sva četiri ruba

Promatra se kvadratni model ploče s geometrijom i opterećenjem na Slici 6. Model je zglobno pridrzan po svim rubovima i opterećen je tlačnim opterećenjem  $n_x$  samo u jednom smjeru, a kontinuiranim poprečnim opterećenjem  $q_z=8 \text{ kN/m}^2$  preko cijele površine. Potrebno je odrediti efekte po teoriji drugog reda za različite veličine sile  $n_x$ , te ocijeniti blizinu kritične sile.



**Slika 6.** Model ploče s omjerom stranica 1:1, opterećen u vlastitoj ravnini i okomito na nju

Za dvodimenzionalne pločaste modele vrijedi analitički izraz za kritično naprezanje [2], [3]:

$$\sigma_{cr} = k_{mn} \cdot \sigma_E, \quad (13)$$

pri čemu je:

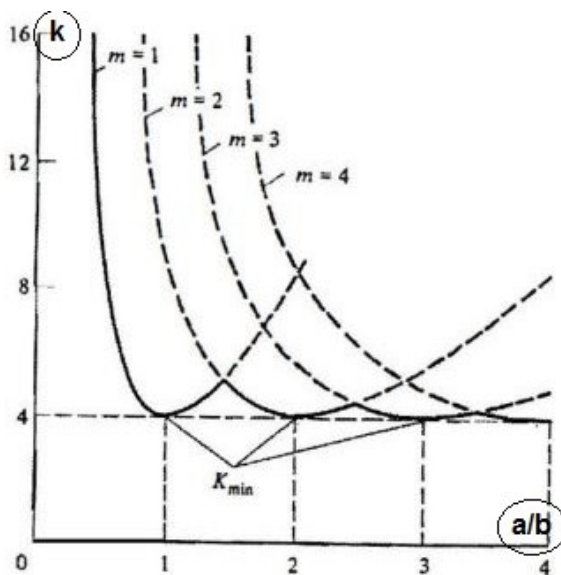
$$k_{mn} = \left( \frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{n^2}{m} \right)^2, \quad (14)$$

a  $\alpha$  je omjer između stranica zadanog modela  $\alpha = \frac{a}{b}$ , te u ovom slučaju iznosi 1. Cijeli brojevi  $n$  i  $m$  opisuju broj valnih formi deformacije ploče (vlastitog oblika izvijanja).  $\sigma_E$  je Eulerovo naprezanje, koje je jednako:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 D}{b^2 t}, \quad (15)$$

gdje je  $D$  krutost ploče za savijanje dana izrazom (2).

Iz dijagrama danoga na Slici 7 [3] može se očitati kako će za odnos  $\alpha = 1$ ,  $n = 1$  i  $m = 1$ , pri čemu je  $n$  broj valova u  $x$ -smjeru, a  $m$  broj valova u  $y$ -smjeru, koeficijent  $k_{mn}$  biti jednak 4. Iz toga se može numerički izračunati kritično naprezanje  $\sigma_{cr}$ .



**Slika 7.** Faktor izbočivanja  $k$  slobodno oslonjene ploče prema omjeru  $a/b$  [3]

$$\sigma_{cr} = 4 \cdot \sigma_E = 4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 10 \cdot 10^7}{12 \cdot (1 - 0,0^2)} \cdot \left(\frac{0,1}{5,0}\right)^2 = 131,461 \text{ MPa}, \quad (16)$$

Za slučaj tlačne uzdužne sile vrijedi:

$$n_x = n_{cr} = \sigma_{cr} \cdot t \rightarrow n_x = 13146,1 \text{ kN/m}^2, \quad (17)$$

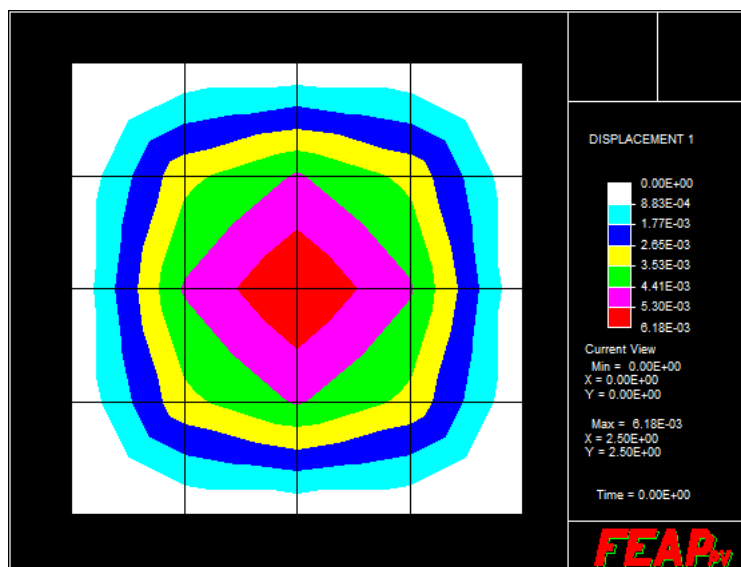
Procedurom ponavljanja u programu FEAP se mogu dobiti vrijednosti kontrolnih parametara na modelu kvadratne ploče za efekte drugog reda (geometrijske nelinearnosti) pri određenoj razini membranskog djelovanja  $n_x$ . Kontrolni su parametri progib sredine ploče i moment savijanja smjera  $x$  ( $M_x$ ) na istome mjestu. U Tablici 3 nalaze se vrijednosti dobivene

programom FEAP kao i broj potrebnih iteracija za preciznost vrijednosti pomaka na četvrtome decimalnome mjestu između dviju iteracija.

**Tablica 3.** Izračunane veličine pomaka i momenta savijanja u na sredini ploče te potreban broj iteracija za model sa Slike 6

$n_x \left( \frac{kN}{m'} \right)$	$w_{\frac{L}{2}} (m)$	$M_{x,\frac{L}{2}} \left( \frac{kNm}{m'} \right)$	$n$
0	0,0017535	6,42680	3
500	0,0018034	6,62744	3
1000	0,0018564	6,78506	3
2000	0,0019719	7,18739	5
3000	0,0021027	7,64249	5
4000	0,0022520	8,16148	5
5000	0,0024238	8,75888	15
10000	0,0039023	10,0746	15
11000	0,0044555	15,8103	20

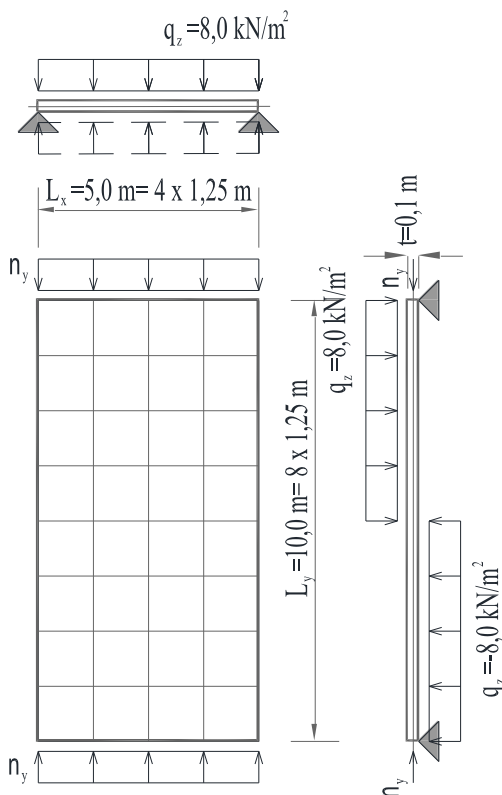
Također se može dobiti i grafički prikaz svih veličina, kao na primjer na grafu pomaka na Slici 8.



**Slika 8.** Grafički prikaz pomaka za najveću silu iz Tablice 3

### 4.3. Kvadratna tanka ploča slobodno oslonjena na sva četiri ruba s omjerom stranica 1:2

Promatra se pravokutni pločasti model na Slici 9. Element je zglobno pridržan na svim rubovima i jednoliko opterećen poprečnim opterećenjem  $q_z = \pm 8 \text{ kN/m}^2$  i tlačnim membranskim opterećenjem u smjeru duže stranice  $n_x$ . Za omjer stranica 1:2 treba odrediti efekte teorije drugog reda s porastom sila  $n_x$ , gdje je odgovarajući koeficijent izbočivanja opet  $k_{mn} = 4$ , ali uz broj valova  $m = 2$ , prema dijagramu minimalnih koeficijenata izbočivanja sa Slike 7. To onda znači da se učinak najmanje kritične sile ( $n = 1, m = 2$ ) može ostvariti samo za inicijalno poprečno opterećenje koje je na jednoj polovici duljine modela pozitivnog, a na drugoj negativnog predznaka (Slika 9). Pomak središnjeg čvora tada je uvijek nula, čak i kad uzdužna djelovanja rastu, pa kontrolni pomak odgovara čvoru na četvrtini modela.



**Slika 9.** Model ploče s omjerom stranica 1:2, opterećen zamjenskim poprečnim teretom u vlastitoj ravnini ploče i okomito na nju

Kao i u prethodnom primjeru, mogu se odrediti vrijednosti progiba, kuta zaokreta te momenata savijanja u svakoj točki modela konačnih elemenata. U Tablici 4 su navedene kontrolne vrijednosti za točku na četvrtini srednje osi ploče s pozitivnom orijentacijom, dobivene iterativnim postupkom u programu FEAP, te kontrolni momenti savijanja.

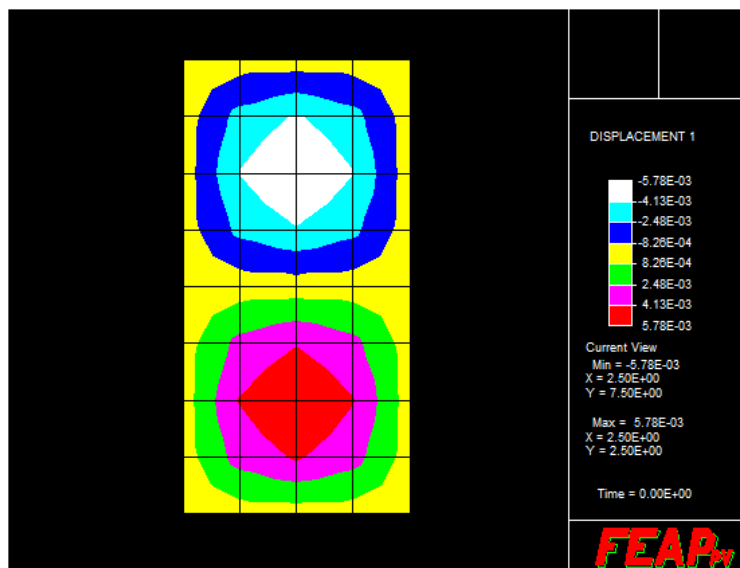
Kontrolni pomak je zbog dvostrukog vala relativno malen usporedbi s prethodnim primjerima, ali i takav progresivno raste s približavanjem sila kritičnoj sili.

**Tablica 4** Izračunane veličine pomaka i momenta savijanja u na četvrtini ploče te potreban broj iteracija  $n$  za model sa Slike 9

$n_y \left( \frac{kN}{m'} \right)$	$w_{\frac{L}{4}} (m)$	$M_{\frac{L}{4}} \left( \frac{kNm}{m'} \right)$	$n$
0	0,0017245	6,03734	3
500	0,0017726	6,40452	3
1000	0,0018235	6,57675	3
2000	0,0019344	7,22770	5
3000	0,0020597	7,38307	5
4000	0,0022021	7,86857	5
5000	0,0023656	8,18068	15
10000	0,0037556	13,1425	15
11000	0,0042540	14,8301	20
12000	0,0049038	17,0501	25
12500	0,0053843	18,3963	25
13000	0,0057823	20,0049	30

Kritična sila za taj model ploče jednaka je kritičnoj sili ploče s kvadratnim dimenzijama iz prethodnog primjera čija je kraća stranica jednake duljine jer je i koeficijent izbočivanja isti,  $k = 4$ . I deformacijski je oblik jednog vala jednak deformacijskom obliku ploče s omjerom stranica 1:1. Pri jednakoj su tlačnoj sili kontrolni pomaci gotovo jednaki, što se može zamijetiti usporedbom vrijednosti iz Tablice 4 s onima iz Tablice 3.

Prema izvodu iz programa FEAP grafički prikaz pomaka s dva vala dan je na Slici 10, za silu koja je najveća u Tablici 4.



**Slika 10.** Grafički prikaz pomaka za približno kritičnu silu modela sa Slike 9

## 5. Zaključak

U ovom je radu prikazan numerički postupak za modeliranje ravninskih konstrukcija opterećenih okomito i u ravnini modela za efekte geometrijske nelinearnosti, kakvi se mogu pojaviti u razupornim pločama ili zidovima. Temeljem opisanog postupka i uz primjenu postojećih konačnih elemenata za ploče [4] i [5] je izrađen i programski kod u slobodnom akademskom programu FEAP, koji uzima u obzir efekte drugog reda na početno stanje deformacija prouzročeno poprečnim opterećenjem.

Usporedbom s analitičkim rješenjima tipičnih primjera stabilnosti može se zaključiti kako aplikacija u FEAP-u daje dobre rezultate pri izračunu veličina poprečnih pomaka i kuta zaokreta te momenata i transverzalnih sila za djelovanja membranskih sila koja su bitno ispod kritičnih. Podudaranje kontrolnih rezultata s analitičkim vrijednostima ovisi prije svega o gustoći čvorne mreže, ali i o broju iteracija. Da bi se zadržala očekivana preciznost izračunanih deformacija po teoriji drugog reda, približavanjem sila u ravnini modela kritičnoj sili treba povećati broj iteracija. Bez obzira na broj iteracija, kritična se sila u potpunosti ne može doseći jer sve deformacijske vrijednosti kao i naprezanja presjeka teže beskonačnim vrijednostima.

U ovom radu prikazana su samo tri numerička primjera, ali sva tri ukazuju na mogućnosti primjene programske aplikacije unutar programa

FEAP za ravninske modele s tri stupnja ili prostorne modele sa šest stupnjeva slobode. Svi analizirani primjeri riješeni su za konstantna stanja membranskih napreznja, ali bi se s korigiranim programskim kodom, postupak mogao primijeniti i na primjere modela s promjenljivim membranskim napreznjima, kakva nastaju u prostornim ljuskama, gdje membranske sile variraju zbog prostorno zakrivljene geometrije modela. Program FEAP nudi i mogućnost definiranja materijala različitih svojstava, te ima potencijal raznovrsne primjene na složenim modelima.

**Zahvala.** *Ovaj je članak rezultat rada u okviru projekta „Metoda usvojenih deformacija za konačne elemente slojevitih ploča i ljuski i njena primjena na probleme delaminacije - ASDEL” (IP-06-2016), koji je u cijelosti financiran sredstvima Hrvatske zaklade za znanost.*

## Literatura

- [1] Gros, L. *Usporedba analitičkog i numeričkog proračuna vitkih ploča za međudjelovanja sila u ravnini i okomito na ravninu modela*. Diplomski rad. Građevinski fakultet u Rijeci, 2016.
- [2] Timošenko, S. *Teorija elastične stabilnosti*. Naučna knjiga, Beograd, 1952.
- [3] Čaušević, M., Bulić, M. *Stabilnost konstrukcija*. Golden marketing – Tehnička knjiga. Zagreb, 2013.
- [4] Ribarić, D., Jelenić, G. Higher-order linked interpolation in quadrilateral thick plate finite elements. *Finite elements in analysis and design* br. 51. 67-80, 2012.
- [5] Ribarić, D., Papa, E., Jelenić, G. Primjena vezane interpolacije na konačne elemente Mindlinovih ploča. *Zbornik radova Građevinskoga fakulteta Sveučilišta u Rijeci* br. 12. 191-216, 2009.