GAUSS-LEGENDRE-RADAUOVA I GAUSS-LEGENDRE-LOBATTOVA NUMERIČKA INTEGRACIJA

GAUSS-LEGENDRE-RADAU AND GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO NUMERICAL INTEGRATION

Nina Čeh[*], Ivan Dražić[**], Nermina Mujaković[***]

Sažetak

Gaussove formule za numeričku integraciju temelje se na izračunu vrijednosti podintegralne funkcije u Gaussovim čvorovima i množenju tih vrijednosti s težinskim faktorima, pri čemu su čvorovi nejednoliko distribuirani što povećava točnost u odnosu na uniformnu distribuciju. U radu su detaljnije opisane Gauss-Legendre-Radauova i Gauss-Legendre-Lobattova integracijske formule za numeričku integraciju funkcija s barem jednim rubom intervala integracije koji je ujedno i čvor integracije. Navedene formule testiraju se na primjeru Rungeove funkcije.

Ključne riječi: *Gaussova integracija, Gauss-Radauova i Gauss-Lobattova formula*

Abstract

Gauss formulae for numerical integration are based on calculating the values of the integrand at Gaussian nodes and multiplying these values by weight factors, whereby the nodes are nonuniformly distributed in order to achieve higher accuracy compared to the uniform distribution of nodes. In this work Gauss-Legendre-Radau and Gauss-Legendre-Lobatto integration formulae, in which at least one end of the integration interval is a node, are listed in detail. These formulae are tested using the Runge function.

Key words: *Gauss integration, Gauss-Radau formula, Gauss-Lobatto formula*

[*] Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka
E-mail: nina.ceh@uniri.hr
[**] Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Vukovarska 58, 51000 Rijeka
E-mail: ivan.drazic@riteh.hr
[***] Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, Radmile Matejčić 2, 51000 Rijeka
E-mail: muajkovic@inet.hr

Rad zaprimljen: 23. 3. 2017. Rad prihvaćen: 23. 5. 2017

1. Uvod

Numerička integracija svodi se često na podjelu intervala integracije na konačni broj segmenata, na čijim se rubovima računaju vrijednosti podintegralne funkcije i množe s određenim težinskim koeficijentima. Točke u kojima se računaju vrijednosti funkcije nazivaju se tada čvorovi integracije. Ako su segmenti unutar intervala integracije jednake veličine, radi se o Newton-Cotesovim integracijskim formulama. U tom je slučaju interval integracije ponekad potrebno podijeliti na vrlo velik broj segmenata da bi se postigla tražena točnost numeričke integracije, što uvelike usporava numerički proračun. Ako su segmenti unutar intervala integracije različite veličine, mogu se optimalno rasporediti točke u kojima se računa vrijednost funkcije tako da numerička integracija daje točnije rezultate upotrebom manjeg broja točaka. Skupina integracijskih formula koje se baziraju na takvom principu i koje su opisane u nastavku nazivaju se Gaussove integracijske formule.

U nastavku rada opisana je osnovna ideja Gaussovih formula za numeričku integraciju, a detaljnije su izvedene Gauss-Legendreova, Gauss-Radauova (odnosno Gauss-Legendre-Radauova) i Gauss-Lobattova (odnosno Gauss-Legendre-Lobattova) integracijske formule. U programskom paketu Matlab napisan je algoritam za numeričku integraciju proizvoljne matematičke funkcije na proizvoljnom intervalu, koji može raditi na principu bilo koje od triju opisanih Gaussovih formula. Algoritam je testiran na integraciji Rungeove funkcije.

2. Gaussove integracijske formule

Gaussova integracija bazira se na primjeni formule (vidi [1]):

$$I[f] = \int_a^b f(\lambda)d\lambda = \sum_{j=1}^{n} w_j f(t_j) + \sum_{k=1}^{m} v_k f(z_k) + E[f], \tag{1}$$

gdje su težinski koeficijenti $[w_j]_{j=1}^{n}$, $[v_k]_{k=1}^{m}$ i Gaussove točke $[t_j]_{j=1}^{n}$ nepoznanice, dok su točke $[z_k]_{k=1}^{m}$ zadane. Član $E[f]$ u jednadžbi (1) predstavlja grešku numeričke integracije.

Ovisno o drugom članu na desnoj strani jednadžbe (1) mogu se definirati tri različita Gaussova integracijska pravila [1]:

- za $m = 0$ Gaussovo pravilo bez unaprijed zadanih točaka
- za $m = 1$ i $z_1 = a$ ili $z_1 = b$ Gauss-Radauovo pravilo s jednom unaprijed zadanom točkom

- za $m = 2$ te $z_1 = a$ i $z_2 = b$ Gauss-Lobattovo pravilo s dvije unaprijed zadane točke.

3. Gaussovo integracijsko pravilo bez unaprijed zadanih točaka

Pri korištenju Gaussova integracijskog pravila bez unaprijed zadanih točaka sve su točke $\left[t_j\right]_{j=1}^{n}$ i težinski koeficijenti $\left[w_j\right]_{j=1}^{n}$ nepoznati. Osnovni oblik Gaussove integracijske formule jest [1]:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{j=1}^{n} w_j f\left(t_j\right). \quad (2)$$

Formula (2) pripada jednoj široj porodici integracijskih formula. To je porodica formula koje imaju oblik

$$\int_a^b w(t)f(t)dt \approx \sum_{j=1}^{n} w_j f\left(t_j\right), \quad (3)$$

gdje je $w(t)$ funkcija koja je pozitivna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$. Funkcija $w(t)$ zove se težinska funkcija. Ovisno o težinskoj funkciji postoje različita Gaussova integracijska pravila, od kojih su neka najpoznatija navedena u Tablici 1.

Tablica 1. *Različite Gaussove integracijske formule ovisno o težinskoj funkciji [1]*

Težinska funkcija w	**Interval**	**Integracijsko pravilo Gauss-**
1	$[-1,1]$	Legendre
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1,1]$	Čebišev
$\sqrt{1-x^2}$	$[-1,1]$	Čebišev 2. vrste
e^{-x}	$[0,\infty\rangle$	Laguerre
e^{-x^2}	$\langle-\infty,\infty\rangle$	Hermite

Primijetimo da Gauss-Legendreova integracijska formula ima granice integracije u točkama -1 i 1. Kako bi se mogla približno izračunati vrijednost integrala unutar proizvoljnog intervala, potrebno je provesti promjenu granica integracije [2]. Ako je integral dan u obliku:

$$I_1[f] = \int_a^b f(x)dx\,, a, b \in R, \quad (4)$$

supstitucijom $x = \frac{(b+a)+(b-a)t}{2}$ integral (4) postaje [2]:

$$I_1[f] = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b+a)+(b-a)t}{2}\right)dt. \quad (5)$$

Dakle, ne gubeći općenitost, dovoljno je i dalje razmatrati samo integracijski segment $[-1,1]$.

U nastavku je opisano algebarsko izvođenje formula za Gauss-Legendreova integracijska pravila bez unaprijed zadanih točaka [3].

3.1. Gauss-Legendreovo integracijsko pravilo

Najjednostavniji način demonstracije Gauss-Legendreova (u nastavku GL) integracijskog pravila jest da se izvede Gauss-Legendreova formula s dvije točke prema izrazu:

$$I[f] \approx L_{GL}[f] = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2). \tag{6}$$

GL formula za dvije točke dana jednadžbom (6) sadrži dvije nepoznate Gaussove točke, t_1 i t_2, i dva napoznata težinska koeficijenta, w_1 i w_2. Dakle, postoje četiri napoznanice i potrebna su četiri uvjeta za određivanje tih nepoznanica [4]. Navedena četiri uvjeta proizlaze iz pretpostavki da jednadžba (6) daje egzaktno rješenje integrala za polinome stupnja ne većega od tri [4]. Dakle, potrebno je riješiti ove četiri jednadžbe [4]:

$$w_1 + w_2 = \int_{-1}^{1} 1dt = 2, \tag{7}$$

$$w_1 t_1 + w_2 t_2 = \int_{-1}^{1} tdt = 0, \tag{8}$$

$$w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}, \tag{9}$$

$$w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 = \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0. \tag{10}$$

Rješenje je tog sustava $w_1 = w_2 = 1$, $t_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Iz toga slijedi GL formula s dvije točke [4]:

$$L_{GL}[f] = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \tag{11}$$

Već za Gaussovu integracijsku formulu s dvije točke potrebno je riješiti sustav od četiri jednadžbe u kojima se nepoznanice t_1 i t_2 javljaju u nelinearnom obliku. Analogno opisanom postupku može se izvesti Gaussova formula s tri ili bilo kojim većim brojem točaka. Jasno je da definiranje GL formule s n točaka iziskuje pronalazak $2n$ nepoznanica, odnosno definiranje jednako toliko jednadžbi. Dakle, vrijedi:

$$p + 1 = 2n, \tag{12}$$

odnosno:

$$p = 2n - 1, \qquad (13)$$

gdje je p najviši stupanj polinoma za koji GL integracijska formula s n točaka daje egzaktno rješenje [1].

Gaussove točke i težišne koeficijente nije lako pronaći već i za prikazano GL integracijsko pravilo, a s povećanjem broja Gaussovih točaka povećava se i kompleksnost rješavanja sustava nelinearnih jednadžbi za njihov pronalazak. Gaussove točke i odgovarajući težinski koeficijenti dani su tablično za prvih nekoliko GL integracijskih pravila prema broju točaka (Tablica 2).

Tablica 2. *Gaussove točke, težinski koeficijenti i greške (**c** je točka unutar intervala* $[-1,1]$*) Gauss-Legendreova integracijskog pravila ovisno o stupnju [1]*

n	**Gaussove točke** t_j	**Težinski koeficijenti** w_j	**Greška** $R[f]$
2	$\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{f^{(4)}(c)}{135}$
3	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ 0	$\frac{5}{9}$ $\frac{8}{9}$	$\frac{f^{(6)}(c)}{15750}$
4	$\frac{\pm\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{35}$ $\frac{\pm\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$ $\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	$\frac{f^{(8)}(c)}{3472875}$
5	0 $\pm\frac{\sqrt{245-14\sqrt{70}}}{21}$ $\pm\frac{\sqrt{245+14\sqrt{70}}}{21}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$ $\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	$\frac{f^{(10)}(c)}{1237732650}$

Općenito se može primjetiti da će, ako se radi o integraciji na intervalu $[-1,1]$, uvijek vrijediti:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 2. \qquad (14)$$

Integracijske točke GL formule danog reda n jesu nul-točke Legendreova polinoma odgovarajućeg reda, P_n, za svaki n [1]. Rodriguezova formula daje eksplicitni izraz za n-ti Legendreov polinom:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n. \qquad (15)$$

Kad su određivanjem nul-točaka odgovarajućega Legendreova polinoma dobivene Gaussove točke $t_j, j = 1, \dots, n,$ odgovarajući težinski koeficijenti mogu se tada pronaći s pomoću formula [3]:

$$w_j = \frac{2\left(1-t_j^2\right)}{(n+1)^2\left[P_{n+1}(t_j)\right]^2}, j = 1, \dots, n. \tag{16}$$

Greška Gauss-Legendreove numeričke integracije je [3]:

$$E[f] = \frac{2^{(2n+1)}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi). \tag{17}$$

4. Gaussova integracijska pravila s unaprijed zadanim točkama

Gaussova integracijska pravila s unaprijed zadanim točkama mogu imati jednu ili obje granice intervala integracije zadane kao Gaussove integracijske točke [1]. Ovisno o tome radi li se o jednoj ili dvjema unaprijed zadanim točkama, postoje dva različita integracijska pravila objašnjena u nastavku.

4.1. Gauss-Radauovo integracijsko pravilo

Gaussovo integracijsko pravilo za koje vrijedi da je $m = 1$ i da je ili donja granica $a = z_1$ ili gornja granica $b = z_1$ naziva se Gauss-Radauovo integracijsko pravilo. Gauss-Radauovo integracijsko pravilo s n točaka, od kojih je $n - 1$ točaka $t_1, \dots, t_{n-1}$ slobodno, ima ukupno $2n - 1$ nepoznanica $(t_1, \dots, t_{n-1}, w_1, \dots, w_{n-1}, v_1)$ i iziskuje jednako toliko jednadžbi za njihov pronalazak. Odgovarajuća je formula točna za sve polinome stupnja p za koje [5]

$$p \leq 2n - 2. \tag{18}$$

Osnovni oblik Gauss-Radauove integracijske formule jest:

$$\int_{-1}^{1} w(t)f(t)dt \approx \sum_{j=1}^{n-1} w_j f(t_j) + v_1 f(z_1), \tag{19}$$

gdje z_1 može biti donja ili gornja granica intervala. Ako je težišna funkcija $w(t) \equiv 1$, onda se radi o Gauss-Legendre-Radauovome integracijskom pravilu (u nastavku zvano GLR pravilo) definiranome na intervalu $[-1,1]$, opisano u nastavku.

Gaussove točke $t_1, \dots, t_{n-1}$ GLR integracije su nul- točke polinoma ϕ_{n-1}, koji je definiran jednadžbom [3]:

$$(1 + t)\phi_{n-1} = (1 + t)\left[P_{n-1}(t) + \frac{t-1}{n} P'_{n-1}(t)\right], \tag{20}$$

gdje je P'_{n-1} prva derivacija Legendreova polinoma P_{n-1} stupnja $n - 1$. Primjenom formule

$$(1-t^2)P_n'(t) = -ntP_n(t) + nP_{n-1}(t) = (n+1)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t) \quad , (21)$$

koja vrijedi za Legendreove polinome, dobiva se da je polinom $\phi_{n-1}(t)$ oblika [3]:

$$\phi_{n-1}(t) = \frac{P_{n-1}(t)+P_n(t)}{1+t}. \quad (22)$$

Kada su pronađene Gaussove točke $t_1, \dots, t_{n-1}$, odgovarajući težinski koeficijenti mogu se izračunati po formulama [3]:

$$w_j = \frac{1}{1-t_j}\frac{1}{[P_{n-1}'(t_j)]^2}, j = 1, \dots, n-1 \quad (23)$$

i

$$v_1 = \frac{1}{\phi_{n-1}(-1)}\int_{-1}^{1}\phi_{n-1}(t)dt = \frac{2}{n^2}. \quad (24)$$

Može se primijetiti da je za izračun točaka integracije i težinskih koeficijenata potrebno riješiti sustav jednadžbi koji je nelinearan po nepoznatim točkama $t_1, \dots, t_{n-1}$. Gaussove točke i odgovarajući težinski faktori dani su tablično za prvih nekoliko netrivijalnih GLR integracijskih pravila prema broju točaka (Tablica 3), a u literaturi se mogu pronaći rješenja i za pravila s većim brojem točaka [3].

Tablica 3. *Gaussove točke i težinski koeficijenti GLR integracijskog pravila ovisno o stupnju [3]*

n	**Gaussove točke z_1, t_j**	**Težinski koeficijenti v_1, w_j**
2	-1 0,333333	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$
3	-1 $-0{,}289898$ 0,689898	0,222222 1,024972 0,752806
4	-1 $-0{,}575319$ 0,181066 0,822824	0,125000 0,657689 0,776387 0,440925
5	-1 $-0{,}720480$ $-0{,}167181$ 0,446314 0,885792	0,080000 0,446207 0,623653 0,562712 0,287427

Opisano je GLR pravilo s unaprijed određenom točkom integracije koja odgovara donjoj granici intervala.

Greška GLR numeričke integracije jest [3]:

$$E[f] = \frac{2^{2n-1}n[(n-1)!]^4}{[(2n-1)!]^3} f^{(2n-1)}(\xi), \qquad (25)$$

gdje ξ leži unutar intervala inetgracije $\langle -1,1 \rangle$

4.2. Gauss-Lobattovo integracijsko pravilo

Gaussovo integracijsko pravilo za koje vrijedi da je $m = 2$ te da je donja granica $a = z_1$ i gornja granica $b = z_2$ naziva se Gauss-Lobattovo integracijsko pravilo. Gauss-Lobattovo integracijsko pravilo s n točaka, od kojih je $n-2$ točka $t_1, \dots, t_{n-2}$ slobodno, ima ukupno $2n-2$ nepoznanica $(t_1, \dots, t_{n-2}, w_1, \dots, w_{n-2}, v_1, v_2)$ i iziskuje da odgovarajuća formula bude točna za polinome stupnja p [6], gdje je

$$p \leq 2n-3. \qquad (26)$$

Osnovni oblik Gauss-Lobattove integracijske formule jest:

$$\int_{-1}^{1} w(t)f(t)dt \approx \sum_{j=1}^{n-2} w_j f(t_j) + v_1 f(z_1) + v_2 f(z_2), \qquad (27)$$

gdje je z_1 donja granica intervala, a z_2 gornja granica intervala. Ako je težinska funkcija $w(t) \equiv 1$, radi se o Gauss-Legendre- Lobattovu integracijskom pravilu (u nastavku zvanome GLL pravilo), koje je opisano u nastavku.

Gaussove točke $t_1, \dots, t_{n-2}$ GLL integracije s n točaka jesu nul-točke polinoma [6]:

$$(t^2-1)\psi_{n-2}(t) = (t^2-1)P'_{n-1}(t), \qquad (28)$$

gdje je $P'_{n-1}(t)$ prva derivacija Legendreova polinoma P_{n-1} (primijetimo da i rubne točke $z_1 = -1$ i $z_2 = 1$ zadovoljavaju (28)). Kada su pronađene Gaussove točke $t_1, \dots, t_{n-2}$, odgovarajući težinski koeficijenti mogu se pronaći iz izraza:

$$w_j = \frac{2}{n(n-1)\left[P_{n-1}(t_j)\right]^2}, j = 1, \dots, n-2, \qquad (29)$$

i

$$v_k = \frac{2}{n(n-1)}, k = 1,2\,. \qquad (30)$$

Za izračun točaka integracije i težinskih koeficijenata potrebno je riješiti sustav jednadžbi koji je nelinearan po nepoznatim točkama. Gaussove točke i odgovarajući težinski koeficijenti dani su tablično za prvih nekoliko netrivijalnih GLL integracijskih pravila prema broju točaka (Tablica 4), a u literaturi se mogu pronaći rješenja i za pravila s većim brojem točaka [3].

Tablica 4. *Gaussove točke i težinski koeficijenti GLL integracijskog pravila ovisno o stupnju [3]*

n	**Gaussove točke z_1,z2, t_j**	**Težinski koeficijenti v_1, v_2, w_j**
3	± 1 0	$\frac{1}{3}$ $\frac{4}{3}$
4	± 1 $\pm 0{,}447214$	$\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$
5	± 1 0 $\pm 0{,}654654$	$\frac{1}{10}$ $\frac{32}{45}$ $\frac{49}{90}$
6	± 1 $\pm 0{,}285232$ $\pm 0{,}765055$	0,066667 0,554858 0,378475

Greška GLL nomeričke integracije jest [3]:

$$E[f] = -\frac{2^{2n-1} n(n-1)^3[(n-2)!]^4}{(2n-1)[(2n-2)!]^3} f^{(2n-2)}(\xi), \qquad (31)$$

gdje ξ leži unutar intervala integracije $\langle -1,1 \rangle$.

5. Prednosti i nedostaci Gauss-Legendreove, Gauss-Legendre-Radauove i Gauss-Legendre-Lobattove integracijske formule

Osnovna prednost opisanih integracijskih formula jest mogućnost integriranja polinoma uz upotrebu manjeg broja integracijskih točaka nego što je to slučaj kod drugih formula za numeričku integraciju [7]. Kod integracije na nekome općenitome zatvorenom intervalu, nedostaci su GLR i GLL integracijske formule potreba za korištenjem većeg broja Gaussovih točaka nego GL formula da bi se postigla egzaktnost (kod integracije polinoma) ili zadovoljila zadana tolerancija (kod integracije drugih funkcija) numeričke integracije.

Osnovna prednost korištenja GLR i GLL formule jest u slučajevima kad podintegralna funkcija iščezava u jednom ili oba kraja intervala integracije. Ako podintegralna funkcija iščezava, odnosno jednaka je nuli u jednome (u ovom radu donjem) rubu intervala, tada je u GLR numeričku integraciju doista uključeno $r = n - 1$ Gaussovih točaka, a stupanj p polinoma za koji formula daje egzaktno rješenje jest $p = 2n - 2 = 2r$ [3], dok u istoj situaciji GL formula koristi $r = n$ točaka i egzaktno integrira polinome do stupnja $p = 2r - 1$. Ako podintegralna funkcija iščezava, odnosno jednaka je nuli u oba kraja intervala, tada je u GLL numeričku integraciju doista uključeno $r = n - 2$ Gaussovih točaka, a stupanj polinoma za koji formula daje egzaktno rješenje jest $p = 2n - 3 = 2r + 1$ [6], dok u istoj situaciji GL formula ponovno koristi svih $r = n$ točaka i egzaktno integrira polinome do stupnja $p = 2r - 1$. Upotrebom jedne od navedenih formula s unaprijed zadanim točkama mogu se egzaktno integrirati polinomi višeg stupnja nego upotrebom Gaussove formule sa svim slobodnim točkama ako funkcija ima vrijednost jednaku nuli u jednom ili oba ruba intervala [3]. Istaknimo još da postoje slučajevi, primjerice kod inicijalno-rubnih problema za diferencijalne jednadžbe kod kojih je, zbog zadanih početnih i rubnih uvjeta, rubne točke domene nužno uključiti u čvorove integracije te se klasična GL formula ne može koristiti.

6. Primjeri

Da bi se na primjerima pokazao princip izračuna integrala koristeći opisane Gaussove integracijske formule, napisan je algoritam *Gaussova_kvadratura* u programskom paketu Matlab [7]. Algoritam služi za izračun integrala zadane analitičke funkcije upotrebom GL, GLR i GLL integracijske formule, ovisno o zadanom broju unaprijed određenih točaka. Nakon odabira odgovarajuće Gaussove formule, algoritam poziva jedan od triju algoritama za izračun položaja Gaussovih točaka i pripadajućih težinskih koeficijenata, koji su preuzeti iz literature [6, 8] i djelomično modificirani za upotrebu u ovom radu.

Za testiranje numeričke integracije opisanim Gaussovim pravilima odabrana je Rungeova funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \tag{32}$$

na intervalu $[-1,1]$. Ta je funkcija izabrana jer ju je moguće egzaktno integrairati, a kod uniformne distribucije čvorova producira značajnu grešku [1].

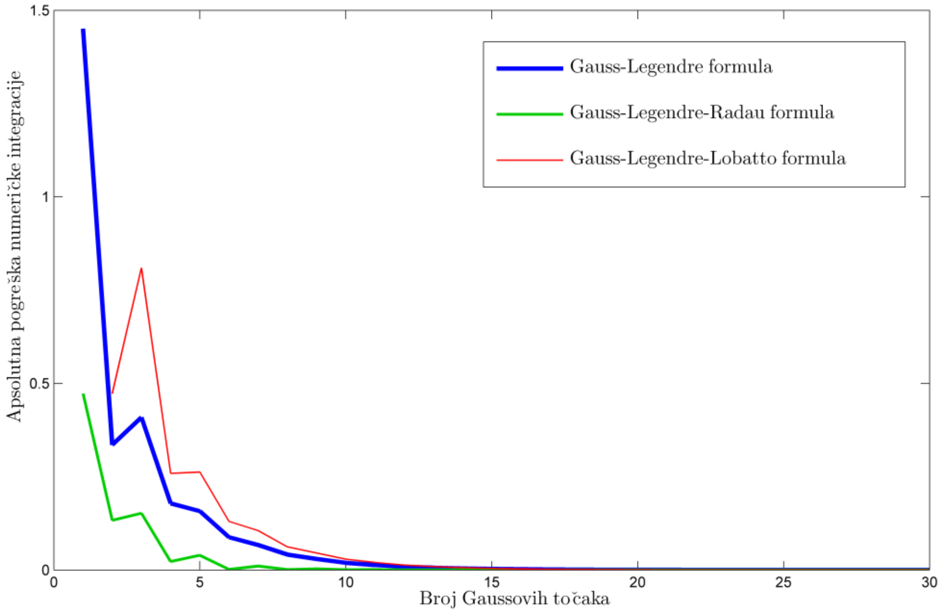
Rezultati su dani u Tablici 5, a vrijednost apsolutne pogreške numeričke integracije, izračunane kao

$$R_{GL}[f] = |I[f] - L[f]|, \tag{33}$$

prikazana je na Slici 1.

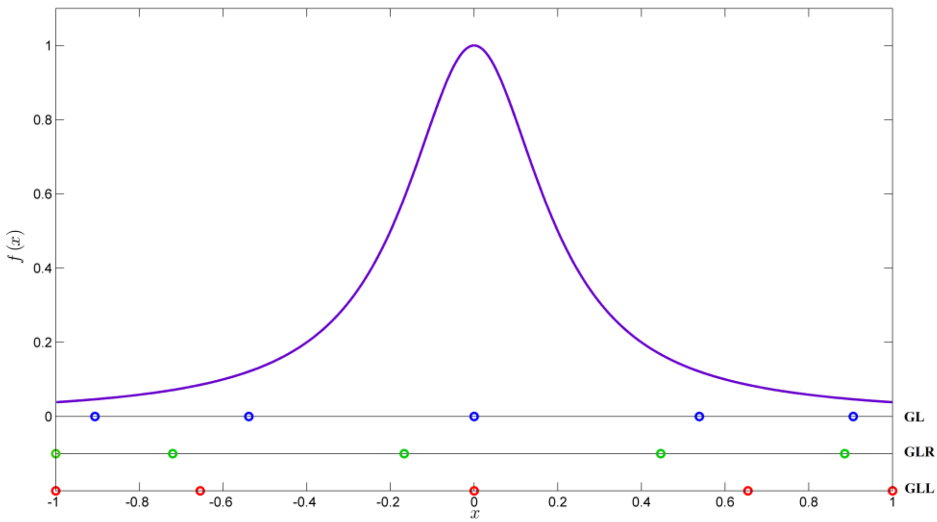
Tablica 5. *Rezultati i apsolutne pogreške numeričke integracije Rungeove funkcije $f(x)$ na intervalu* $[-1,1]$

n	GL integracija		GLR integracija		GLL integracija	
	$L_{GL}[f]$	$R_{GL}[f]$	$L_{GLR}[f]$	$R_{GLR}[f]$	$L_{GLL}[f]$	$R_{GLL}[f]$
1	2,0000	1,4506	0,0769	0,4724	-	-
2	0,2143	0,3351	0,4163	0,1331	0,0769	0,4724
3	0,9583	0,4090	0,3974	0,1519	1,3590	0,8096
4	0,3709	0,1784	0,5270	0,0224	0,2906	0,2588
5	0,7069	0,1576	0,5102	0,0392	0,8118	0,2624
6	0,4617	0,0877	0,5480	0,0014	0,4193	0,1300
7	0,6161	0,0668	0,5391	0,0102	0,6546	0,1052
8	0,5081	0,0412	0,5504	0,0010	0,4875	0,0619
9	0,5787	0,0293	0,5465	0,0029	0,5946	0,0452
10	0,5304	0,0190	0,5501	0,0007	0,5208	0,0286
11	0,5625	0,0131	0,5484	0,0009	0,5693	0,0200
12	0,5407	0,0087	0,5497	0,0003	0,5363	0,0130
13	0,5552	0,0059	0,5490	0,0003	0,5583	0,0089
14	0,5454	0,0039	0,5495	0,0002	0,5434	0,0059
15	0,5520	0,0027	0,5492	0,0001	0,5534	0,0040
16	0,5476	0,0018	0,5494	0,0001	0,5467	0,0027
17	0,5506	0,0012	0,5493	0,0000	0,5512	0,0018
18	0,5486	0,0008	0,5494	0,0000	0,5482	0,0012
19	0,5499	0,0005	0,5493	0,0000	0,5502	0,0008
20	0,5490	0,0004	0,5494	0,0000	0,5488	0,0005
21	0,5496	0,0002	0,5494	0,0000	0,5497	0,0004
22	0,5492	0,0002	0,5494	0,0000	0,5491	0,0002
23	0,5495	0,0001	0,5494	0,0000	0,5495	0,0002
24	0,5493	0,0001	0,5494	0,0000	0,5492	0,0001
25	0,5494	0,0000	0,5494	0,0000	0,5494	0,0001
26	0,5493	0,0000	0,5494	0,0000	0,5493	0,0001
27	0,5494	0,0000	0,5494	0,0000	0,5494	0,0000
28	0,5493	0,0000	0,5494	0,0000	0,5493	0,0000
29	0,5494	0,0000	0,5494	0,0000	0,5494	0,0000
30	0,5494	0,0000	0,5494	0,0000	0,5494	0,0000

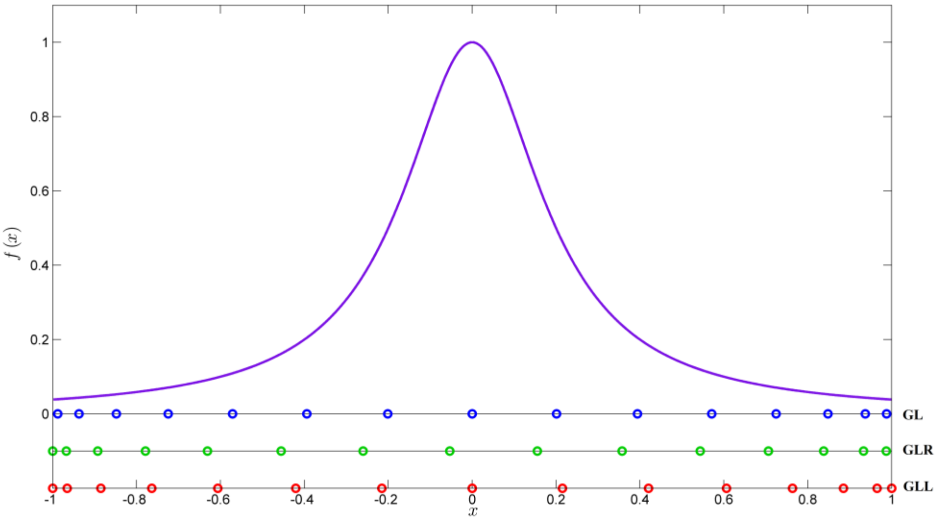


Slika 1. Apsolutna pogreška numeričke integracije Rungeove funkcije na intervalu $[-1,1]$ kod korištenja opisanih GL, GLR i GLL formula

Distribucija Gaussovih točaka za GL, GLR i GLL integracijske formule, zajedno s Rungeovom funkcijom, prikazane su na Slikama 2 i 3 za formulu s 5 odnosno 15 točaka.



Slika 2. Gaussove točke kod GL, GLR i GLL integracijske formule s 5 točaka



Slika 3. Gaussove točke kod GL, GLR i GLL integracijske formule s 15 točaka

7. Diskusija i zključak

U radu je opisan osnovni princip Gaussove intergacije, s naglaskom na tri Gaussove integracijske formule: Gauss-Legendreovu (GL) formulu, u kojoj su sve intergacijske točke slobodne; Gauss-Legendre-Radauovu (GLR) formulu, u kojoj je jedna od granica intervala integracije unaprijed zadana integracijska točka; i Gauss-Legendre-Lobattovu (GLL) formulu, u kojoj su obje granice intervala integracije unaprijed zadane integracijske točke. Napisan je algoritam za numeričku integraciju bilo kojom od triju opisanih metoda u programskom paketu Matlab. Algoritam je testiran na primjeru Rungeove funkcije. Pokazalo se da su sva tri algoritma sličnih brzina konvergencije, dok se najboljom u ovom slučaju pokazala GLR formula.

Literatura

[1] Rogina,M.;Singer,S.; Singer, S., 2003. *Numerička analiza. Predavanja i vježbe.* Sveučilište uZagrebu. PMF – matematički odjel.

[2] Lambers, J. 2009. – 2010. *Gaussian Quadrature – Numerical Analysis I. Lecture notes.* The University of Southern Mississippi (pristupljeno 11. 2. 2014.).

[3] Meurant,G. 2008. *Gauss Quadrature. Matrices, moments and quadrature. First presentation.* Institute for Computational Mathematics. Hong Kong.

[4] Clark,A. 2011. *Legendre polynomials.* http://www.me.rochester.edu/courses/ME201/webexamp/legendre.pdf, (pristupljeno 11. 3. 2014.).

[5] Burkhardt,J. 2007., 2010. *Matlabsoftware.* , http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/m_src.html, (pristupljeno 20. 11. 2014.).

[6] Chapra, S.C.; Canale, R.P. 2010. *Numerical Methods for Engineers, Sixt edition.* McGraw-Hill Higher Education.

[7] Von Winckel,G. 2004. Matlabsoftware.

[8] Zienkiewicz, O.C.; Morgan,K. 2006*. Finite Element Approximation.* Dover Publications Inc.

[9] Hildebrand, F.D. 1987. *Introduction to Numerical Analysis. Second edition.* Dover Publications Inc.