Funkcija* $x \mapsto |x|$

Ivan Lehman†

Sažetak. *U predavanju se navodi nekoliko ilustrativnih primjera u kojima se koriste svojstva funkcije $x \mapsto |x|$.*

Abstract. **The function $x \mapsto |x|$.** *In the lecture several illustrative examples are given where the properties of the function $x \mapsto |x|$ are used.*

Mjereći veličine kao što su duljina, masa, temperatura, jakost struje i slično prirodno se javlja problem procjene točne vrijednosti.

Zbog nepreciznosti mjernog instrumenta, kao i ljudskog faktora, očitane vrijednosti u pravilu su približne. Veličina pogreške izražava se pomoću apsolutne vrijednosti ili modula realnog broja.

Definicija 1.. Apsolutna vrijednost (ili modul) *realnog broja x, u oznaci $|x|$, definira se formulom:*

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pored osnovnih, dobro poznatih svojstava apsolutne vrijednosti, u daljnjem izlaganju koristit ćemo i sljedeća dva svojstva:

(i) $|x| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a$

(ii) $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in R.$

Primjer 1.. *Prikažimo grafički rješenje sustava jednadžbi:*

$$\begin{array}{ccccc} |x| & + & |y-1| & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}$$

U skladu s definicijom apsolutne vrijednosti realnog broja, razlikovat ćemo četiri slučaja:

---

*Predavanje održano u okviru Matematičkog kolokvija, HMD - Podružnica Osijek, 24. svibnja 1996.

†III. gimnazija, K. Firingera 14, HR-31 000 Osijek

1. $(|x| = x \geq 0,\ |y-1| = y-1 \geq 0)$. U ovom slučaju sustav glasi:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y-1 & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1, y=1.$$

Uređeni par $(1,1)$ je rješenje sustava.

2. $(|x| = x \geq 0,\ |y-1| = 1-y > 0)$. U ovom slučaju sustav glasi:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & 1-y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1, y=1.$$

U ovom slučaju uređeni par $(1,1)$ nije rješenje jer nije ispunjen uvjet $1-y>0$.

3. $(|x| = -x \geq 0,\ |y-1| = y-1 \geq 0)$. U ovom slučaju sustav glasi:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} -x & + & y-1 & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-\frac{1}{3}, y=\frac{5}{3}.$$

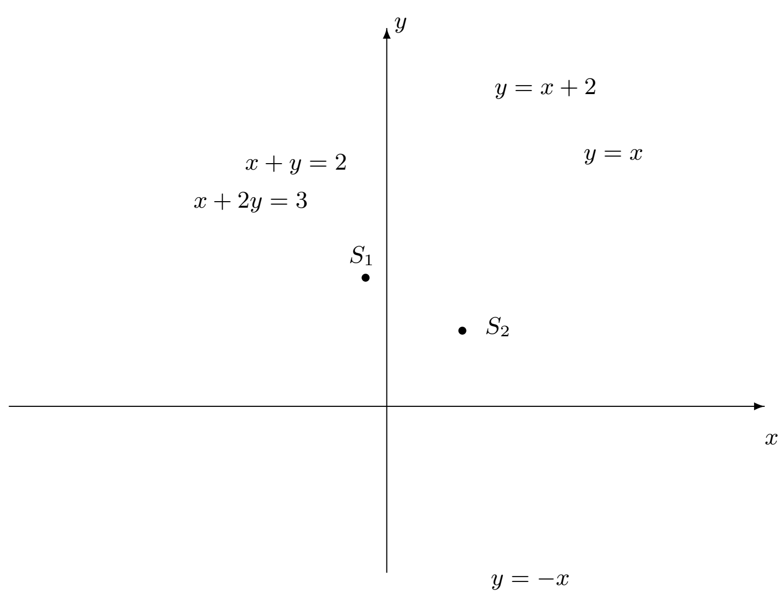
Uređeni par $(-1/3, 5/3)$ je rješenje sustava jer ispunjava postavljene uvjete.

4. $(|x| = -x \geq 0,\ |y-1| = 1-y > 0)$. U ovom slučaju sustav glasi:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} -x & + & 1-y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-3, y=3.$$

Uređeni par $(-3,3)$ nije rješenje sustava jer nije ispunjen uvjet $1-y>0$.

Dakle, sustav ima dva rješenja: $S_1 = (1,1), S_2 = (-1/3, 5/3)$.



Slika 1.

Primjer 2.. *Dokažimo implikaciju:* $x^2 + y^2 \leq 2 \Rightarrow |x + y| \leq 2$.
Iz nejednakosti $(x - y)^2 \geq 0$ dobivamo $2xy \leq x^2 + y^2$, odakle na osnovi pretpostavke $x^2 + y^2 \leq 2$ vrijedi $2xy \leq 2$. Sada koristeći svojstvo *(ii)* dobivamo

$$|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} \leq \sqrt{2 + 2xy} \leq \sqrt{2+2} = 2.$$

Primjer 3.. *Riješimo jednadžbu* $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = mx$, *gdje je* $m \in R$ *parametar.*
Budući da je

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 1 - x^2, & x \in [-1, 1] \end{cases}$$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \\ 4 - x^2, & x \in [-2, 2]\,, \end{cases}$$

dobivamo

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = \begin{cases} -2x^2 + 5, & x \in (-1, 1) \\ 3, & x \in [-2, -1] \cup [1, 2] \\ 2x^2 - 5, & x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)\,. \end{cases}$$

Dakle, posebno treba razmotriti sljedeća tri slučaja:

1. $(|x^2-1|+|x^2-4| = -2x^2+5, \;\&\; x \in (-1, 1))$. U ovom slučaju polazna jednadžba glasi
$$2x^2 + mx - 5 = 0,$$
odakle dobivamo dva kandidata za rješenje:
$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}.$$
2. $(|x^2-1|+|x^2-4| = 3, \;\&\; x \in [-2, -1] \cup [1, 2])$. U ovom slučaju polazna jednadžba glasi $mx = 3$, odakle vidimo da je $x_3 = \frac{m}{3}$ jedini kandidat za rješenje.
3. $(|x^2-1|+|x^2-4| = 2x^2-5, \;\&\; x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty))$. U ovom slučaju polazna jednadžba glasi
$$2x^2 - mx - 5 = 0,$$
odakle dobivamo dva kandidata za rješenje:
$$x_{4,5} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}.$$

Sada možemo provesti sljedeću analizu:

1. ako je $0 \leq m < \frac{3}{2}$, jednadžba nema rješenje,

2. ako je $m = \frac{3}{2}$, jednadžba ima jedno rješenje $x = 2$,
3. ako je $\frac{3}{2} < m \leq 3$, jednadžba ima dva rješenja:

   $x_1 = \frac{3}{m}, \quad x_2 = \frac{m+\sqrt{m^2+40}}{4}$,
4. ako je $3 < m \leq \infty$, jednadžba ima dva rješenja:

   $x_1 = \frac{m+\sqrt{m^2+40}}{4}, \quad x_2 = \frac{m-\sqrt{m^2+40}}{4}$,
5. ako je $-\frac{3}{2} < m \leq 0$, jednadžba nema rješenje,
6. ako je $m = -\frac{3}{2}$, jednadžba ima jedno rješenje $x = -2$,
7. ako je $-3 \leq m < -\frac{3}{2}$ jednadžba ima dva rješenja:

   $x_1 = \frac{3}{m}, \quad x_2 = \frac{m-\sqrt{m^2+40}}{4}$,
8. ako je $-\infty < m \leq -3$, jednadžba ima dva rješenja:

   $x_1 = \frac{-m+\sqrt{m^2+40}}{4}, \quad x_2 = \frac{-m-\sqrt{m^2+40}}{4}$.