POTPUNA VJEROJATNOST
Bayesova formula

Datum prijave: 17.05.2017.
Datum prihvaćanja: 31.05.2017.

UDK: 519.2
Stručni rad

mr. sc. Marko Obradović, Marijana Špoljarić, mag.educ.math et inf. predavač i dr.sc. Vlado Halusek, prof. v. š.
Visoka škola za menadžment u turizmu i informatici u Virovitici
Matije Gupca 78, Virovitica
Telefon: 00-385-33492259 E-mail: omegaobradovic@gmail.com, vlado.halusek@skole.hr, marijana.spoljaric@vsmti.hr

SAŽETAK *- Teorija vjerojatnosti prvenstveno se bavi praktičnim problemima i predstavlja teorijsku osnovu statistike. U radu se navode osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti kao što su: elementarni događaj, relativna frekvencija, vjerojatnosni prostor, uvjetna vjerojatnost, slučajni događaj, potpuni (totalni) sustav događaja na temelju kojih se izvodi Bayesova formula. Vizualnim primjerom ilustrira se Bayesova formula i navode se primjeri primjene Bayesove formule u ekonomiji.*
Ključne riječi: *vjerojatnost, Bayesova formula, primjena Bayesove formule u ekonomiji.*

SUMMARY *- The theory of probability primarily deals with practical problems and it is the theoretical basis of statistics. In the paper, the authors cite the basic concepts of probability theory such as: elemental event, relative frequency, probability space, conditional probability, random event, complete (total) system of events which form the basis for derivation of Bayes' Theorem. A visual example describes Bayes' Theorem and through examples authors explain the application of Bayes' Theorem in economy.*
Keywords: *probability, Bayes' Theorem, Bayes' Theorem application in the economy*

1. UVOD

Prvu raspravu iz teorije vjerojatnosti inspiriranu problemom Hazardnih igara (kocke) objavio je talijanski matematičar G. Cardano 1567. godine. No, ozbiljniji razvoj teorije vjerojatnosti potječe od B. Pascala (1623.-1662.) francuskog matematičara i fizičara. Matematičku formulaciju teorije vjerojatnosti dugujemo između ostalima P. Fermatu, W. Feller, I. Bayes-u.

Značajan napredak u razvoju teorije vjerojatnosti učinio je Jacob Bernoulli u djelu Ars Conjectandi (1713. godine). Ipak, A. N. Kolmogorov je dao sustav aksioma i tako utemeljio teoriju vjerojatnosti kao zasebnu znanstvenu disciplinu[1].

Bayesov teorem je teorem iz teorije vjerojatnosti koji je prvi izrekao Thomas Bayes. Teorem opravdava način razmišljanja u kojem se navodi da se istinitost teorije potvrđuje novim dokazima. To je uvjetna vjerojatnost, vjerojatnost da je jedna pretpostavka istina pod uvjetom da je druga pretpostavka istina. Temeljni cilj Bayesovog teorema je formaliziranje informacije kako jedan događaj može pomoći u razumijevanju drugoga. Odnosno, želi se pronaći vjerojatnost ranijeg događaja pod uvjetom da je nastupio kasniji događaj (Barnett i sur. 2006:434).

Bayesov[2] teorem koristi se u raznim kontekstima, od biologije oceana do razvoja Bayesovih spamova (klasifikatora), popularne statističke tehnike za filtriranje e-maila. Bayesov klasifikator radi na principu korelacije tipičnih riječi sa spamom ili bez spama u e-mailu te koristi Bayesov teorem za izračunavanje vjerojatnosti je li dobiveni e-mail spam ili nije.

Njegovo korištenje primjenjuje se još od 90-ih godina prošlog stoljeća prije svega zbog svoje prilagođenosti potrebama korisnika i niske cijene.

U filozofiji znanosti Bayesov teorem korišten je u pokušaju razjašnjavanja odnosa teorije i dokaza. Mnoge spoznaje u filozofiji znanosti koje uključuju potvrdu, falsificiranje i vezu između znanosti i kvaziznanosti mogu se ispraviti korištenjem Bayesovog teorema.

Prije definiranja Bayesovog teorema potrebno je ponoviti osnovne pojmove iz vjerojatnosti.

2. POJAM VJEROJATNOSTI

Osnovni pojam u vjerojatnosti je neprazan skup Ω koji zovemo prostor elementarnih događaja. On reprezentira sve moguće ishode slučajnog pokusa.
Elementi u skupu Ω, zovu se elementarni događaji.
Pod slučajnim događajem, podrazumijevamo svaki podskup A skupa Ω. Skupovi $\Omega \; i \; \emptyset$ smatraju se događajima.Siguran događaj je cijeli skup Ω i on se nužno mora dogoditi, $\emptyset$ zovemo nemoguć događaj, a $\overline{A} = cA$ zovemo suprotan događaj događaja A. Općenito, događaj je proizvoljni podskup skupa Ω.
Kada je skup Ω konačan (diskretan), vjerojatnost slučajnog događaja $A \subseteq \Omega$, u oznaci $P(A)$ definiramo formulom

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

gdje je:
$P(A)$ - vjerojatnost pojave događaja ili vjerojatnost nastupa događaja A,

[1]http://www.mathos.unios.hr/~bruckler/vjerojatnost.pdf (10.5.2017.)

[2] T. Bayes (1702-1761), engleski matematičar

m - ukupan broj povoljnih ishoda (tj. broj elemenata skupa A),
n - ukupan broj mogućih ishoda (tj. broj elemenata skupa Ω).

Za relativnu frekvenciju događaja A u nizu od n proizvoljnih pokusa, u kojoj je A nastupilo n_A puta, vrijedi formula

$$f_r(A) = \frac{n_A}{n},$$

koja predstavlja procjenu vjerojatnosti promatranog događaja A.

Definicija 1.

Funkcija $p: P(\Omega) \to \mathbb{R}$ zovemo vjerojatnost na skupu svih mogućih događaja slučajnog pokusa $\mathcal{P}(\Omega)$, ako ima svojstva:

(1) Za svaki događaj A vrijedi $P(A) \geq 0$,
(2) $P(\emptyset) = 0$,
(3) $P(\Omega) = 1$,
(4) Ako se događaji $A_1, A_2, \dots, A_n$ isključuju (u parovima) tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$, za $i \neq j$, $i, j = 1,2, \dots, n$, onda vrijedi: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.
(5) No, ako su A i B bilo koja dva događaja, onda vrijedi:
    a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
    b) $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$,
    c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (Pauše, 2003).

Napomena 1. Vjerojatnost bilo kojeg događaja, nalazi se u segmentu $[0,1]$.

2. UVJETNA VJEROJATNOST

Poopćavajući pojam vjerojatnosti dobivamo **uvjetnu** vjerojatnost. Naime, vjerojatnost je moguće definirati preko uvjetne vjerojatnosti kao:

$$P(A) = P(A/\Omega).$$

Definicija 2. Neka je $(\Omega, P(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor, $A \subset \Omega, P(A) > 0$. Tada se vjerojatnost pojave bilo kojeg događaja $B \subset \Omega$, uz uvjet da se dogodio događaj A, definira ovako:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \qquad (1)$$

Za događaje A i B kažemo da su nezavisni, ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

a u suprotnom da su zavisni, odnosno

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B).$$

$P(A \cap B)$ pišemo i kao $P(A \cdot B)$.
Također vrijedi:

(1) Ako je: $P(B/A) = P(B/\bar{A})$, tada su A i B nezavisni događaji
(2) Ako su: $A, B \subseteq \Omega$, onda je
$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B).$$
(3) Ako je: $\mathrm{P(B)} \neq 0$ onda je
$$P(A/B) \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}.$$
(4) $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P\left(\frac{B}{A}\right) \cdot P(A)$.

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ zove se vjerojatnosni prostor. Algebru događaja, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, čine svi podskupovi sigurnog događaja Ω, zajedno sa skupom operacija nad tim podskupom.

Promatramo niz međusobno isključivih događaja $(A_i \cap A_j \neq \emptyset,\ \forall i \neq j)$ $A_1, A_2, \dots, A_n$ takvih da je

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega.$$

Ovakva kolekcija događaja čini potpuni sustav događaja i za njega vrijedi formula potpune (totalne) vjerojatnosti (Sarapa, 2002).

Propozicija 1. Ako niz $A_1, A_2, \dots, A_n$ čini potpun sustav događaja za svaki i $(1 \leq i \leq n)$, $P(A_i) > 0$, onda vrijedi

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i), \qquad (2)$$

gdje je $B \subseteq \Omega$ proizvoljan događaj.

Dokaz:

Budući da događaj B predstavljamo kao uniju međusobno disjunktivnih događaja, to je

$$B = \sum_{i=1}^{n} A_i B.$$

Zbog aditivnosti i definicije vjerojatnosti dobivamo

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i).$$

Dokaz je gotov.
No, ako je $0 < P(A) < 1$ imamo

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A}) \cdot P(\bar{A}).$$

Napomena 2. Za potpuni sustav koji se sastoji od samo dva događaja, A i B, pri $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, vrijedi formula:

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}.$$

3. BAYESOVA FORMULA

Bayesova formula služi za a posteriorno izračunavanje vjerojatnosti pojedinih hipoteza A_i, ako je poznato da se dogodio događaj *B*.

Teorem 1. (Bayesov teorem)

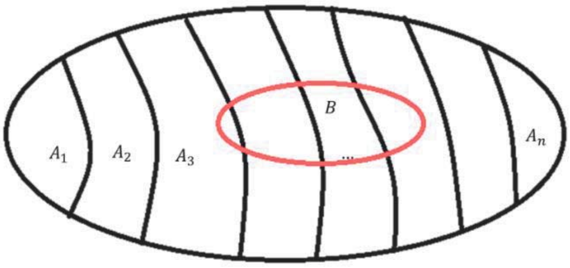
Ako niz $A_1, A_2, \dots, A_n$ čini potpuni sustav događaja i ako je za svaki i $(1 \leq i \leq n)$,
$P(A_i) \geq 0$, onda vrijedi

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B/A_j)}, \text{ za } \forall i, (1 \leq i \leq n), (3)$$

gdje je $B \subseteq \Omega$ proizvoljan događaj.

Bayesova formula daje vjerojatnost hipoteze ako znamo da se dogodio neki događaj i može se korisno primijeniti, npr. u medicinskoj dijagnostici. Neka se na nekoj klinici liječe bolesnici od kojih svaki može imati jednu od bolesti $A_1, A_2, \dots, A_n$. Uočimo jednog bolesnika i neka je kod njega, poslije pregleda, ustanovljen skup B simptoma. Pretpostavimo da su na klinici tijekom njezina rada bilježeni statistički podaci o broju bolesnika o bolesti A_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ tako da iz tih podataka možemo izračunati $P(A_i)$ i $P(B/A_i)$. $P(A_i)$ relativna je frekvencija bolesti A_i među svim bolesnicima liječenim na klinici, a $P(B/A_i)$ relativna je frekvencija ustanovljena skupa simptoma B među onim bolesnicima koji su imali bolest A_i (Sarapa, 2002:65). Promotrimo ilustraciju, sl 3.

Sl. 1. Bayesova formula



Izvor: Autori prema Galić, 2011.

Dokaz: Budući da je

$$P(A_iB) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B),$$

za $1 \leq i \leq n$, također povlači

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{p(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}.$$

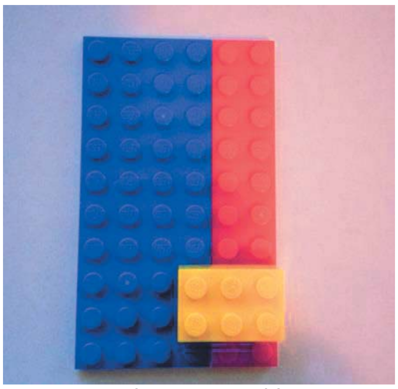
Po formuli **potpune** vjerojatnosti za događaj B, za svaki i $(1 \leq i \leq n)$, dobivamo

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B/A_j)}.$$

Bayesovu formulu se može ilustrirati LEGO elementima[3], kako je prikazano u primjeru 2.

Primjer 1. Izračunajte kolika je vjerojatnost da se ispod žutog elementa nalazi crveni, ako je dano područje od 6×10 LEGO elemenata od kojih je 40 plavih i 20 crvenih, te 6 žutih elemenata koji prekrivaju crvene i plave kao na slici 1.

Sl. 2. 6×10 *LEGO elemenata.*



Izvor: https://www.countbayesie.com/blog/2015/2/18/bayes-theorem-with-lego (10.5.2017.)

Zadano područje od 6×10 LEGO elemenata predstavlja vjerojatnosni prostor koji se sastoji od crvenih, plavih i žutih elemenata. Žuti elementi se nalaze na crvenim ili plavim elementima.

Pošto je pokrivenost plavim elementima 40, a cijeli prostor je veličine 60, vjerojatnost za plavi element je

$$P(plavi) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}.$$

Primijetimo da se prebrojavaju i područja koja su prekrivena žutim elementima.

Pokrivenost crvenim elementima je 20, a cijeli prostor je veličine 60 elemenata, pa je vjerojatnost crvenih elemenata

$$P(crveni) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

Primijetimo da je

$$P(plavi) + P(crveni) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

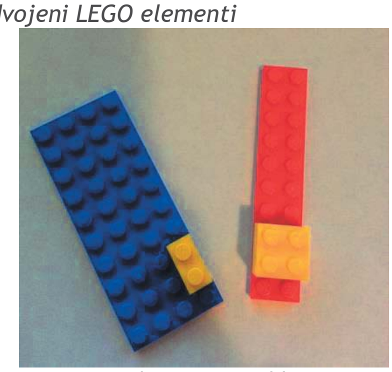
To znači da crveni i plavi elementi mogu opisati skup mogućih događaja.

Pokrivenost žutim elementima je 6, a cijeli prostor je veličine 60, što znači da je vjerojatnost žutih elemenata

$$P(žuti) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}.$$

Pošto žuti elementi prekrivaju jedan dio plavih i crvenih, žute se moraju promatrati s njima. Stoga vjerojatnost pojavljivanja žutih elemenata ovisi o tome razmatrate li one koje su na plavom ili crvenom dijelu promatranog vjerojatnosnog prostora. Vjerojatnost da se žuti element nalazi na plavom dijelu vjerojatnosnog prostora označavamo s $P(žuti/plavi)$, a vjerojatnost da se žuti element nalazi na crvenom dijelu vjerojatnosnog prostora označavamo s $P(žuti/crveni)$.

Sl. 3. Razdvojeni LEGO elementi



Izvor: https://www.countbayesie.com/blog/2015/2/18/bayes-theorem-with-lego (10.5.2017.)

Kako bi odredili $P(žuti/crveni)$ razdvojimo crvene elemente od plavih. Pokrivenost crvenim je 20, a pokrivenost žutim elementima je 4. Dijeljenjem pokrivenosti žutih s pokrivenosti crvenih elemenata dobit ćemo

[3] https://www.countbayesie.com/blog/2015/2/18/bayes-theorem-with-lego (10.5.2017.)

$$P(žuti/crveni) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Što je uvjetna vjerojatnost žutog i crvenog elementa. Razmotrimo sada što je uvjetna vjerojatnost $P = (crveni/žuti)$, tj. ako smo na žutom dijelu prostora kolika je vjerojatnost da je ispod njih crveni element.

Slika 2. ilustrira da 6 žutih elemenata prekriva 4 crvena pa je

$$P(crveni/žuti) = \frac{4}{6}.$$

Na ovaj smo način došli do Bayesove formule. Formalizirajmo način izračunavanja da postoji 6 žutih elemenata. Do zaključka smo došli pomoću prostornog zaključivanja. Prikazat ćemo ovo matematički. Kako bi riješiti ovaj problem uzet ćemo da je broj žutih elemenata jednaka umnošku vjerojatnosti pojave žutih i ukupnog broja elemenata.

$$Broj\ žutih = P(žuti) \cdot Uk.br.elemenata$$
$$= \frac{1}{10} \cdot 60 = 6.$$

Kako bi pokazali da je njih 4 nad crvenim moramo prvo utvrditi koliko je crvenih.

$$Broj\ crvenih = P(crvenih) \cdot Uk.br.elemenat$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 60 = 20.$$

Već smo shvatili koliki je broj crvenih elemenata prekriveno žutima, $P(žuti/crveni)$. Kako bi izračunali broj žutih elemenata koji prekrivaju crvene elemente potrebno je pomnožiti vjerojatnost $P(žuti/crveni)$ s brojem crvenih.

$$Broj\ žutih\ koji\ prekrivaju\ crvene$$
$$= P(žuti/crveni) \cdot Broj\ crvenih$$
$$= \frac{1}{5} \cdot 20 = 4.$$

Na kraju trebamo izračunati $P(crveni/žuti)$, odnosno broj crvenih elemenata koji su prekriveni žutim elementima.

$$P(crveni/žuti) = \frac{Broj\ crvenih\ prekrivenih\ žutima}{Broj\ žutih}$$
$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Da bismo dobili Bayesov teorem potrebno je proširiti ove jednadžbe.

$$P(crveni/žuti) = \frac{P(žuti/crveni) \cdot Broj\ crvenih}{P(žuti) \cdot Uk.br.elemenata},$$

$$P(crveni/žuti) = \frac{P(žuti/crveni)P(crveni) \cdot Uk.br.elemenata}{P(žuti) \cdot Uk.br.elemenata}.$$

Iz prethodnog izraza skraćivanjem $ukupnog\ broja\ elemenat$ dobiva se jednakost

$$P(crveni/žuti) = \frac{P(žuti/crveni) \cdot P(crveni)}{P(žuti)},$$

koja nam predstavlja Bayesovu formulu.

Naglasimo, primjena Bayesove formule je moguća ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti[4]:

1. Uzorak je podijeljen u prostor skupova međusobno isključivih događaja
$$\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\};$$
2. Unutar prostora uzoraka postoji događaj B za koji je $P(B) > 0$;
3. Cilj je za svaki događaj A_k izračunati uvjetnu vjerojatnost oblika $P(A_k/B)$. Pri tom je potrebno znati najmanje jedan od dva uvjeta vjerojatnosti:
   i) $P(A_k \cap B)$ za svaki A_k,
   ii) $P(A_k)$ i $P(B/A_k)$ za svaki A_k.

4. PRIMJENA BAYESOVE FORMULE U EKONOMIJI

Bayesova formula primjenjuje se i u ekonomiji. Sljedeći primjer ilustrira primjenu kod kontrole neispravnosti proizvoda.

Primjer 2. Trgovina „ELEKTRONIKA" d.o.o. nabavlja računala od dva proizvođača P_1 i P_2. Ako od P_1 dopremi 1 000 komada računala, od čega je 5 % s greškom, a od P_2 dopremi 700 komada, od čega je 2 % s greškom. Kolika je vjerojatnost:

a) da slučajno izabrano računalo ima grešku,
b) da je slučajno izabrano računalo koje ima grešku od proizvođača P_1?

➢ Neka su događaji:

$A = \{\text{slučajno izabrano računalo s greškom}\}$
$B_i = \{\text{slučajno izabrano računalo od proizvođača } P_i\}$,
gdje je $i = 1,2$.

a) Računamo vrijednosti:

$$P(B_1) = \frac{1\ 000}{17\ 000} = \frac{10}{17},$$
$$P(B_2) = \frac{7\ 000}{17\ 000} = \frac{7}{17},$$

pa je $P(A/B_1) = 0{,}05$ i $P(A/B_2) = 0{,}02$.

Prema formuli za potpunu vjerojatnost, vrijedi

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i),$$

gdje je A - događaj, a $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ čini potpuni prostor događaja. Konkretno,

$$P(A) = \frac{10}{17} \cdot 0{,}05 + \frac{7}{17} \cdot 0{,}02 = \frac{16}{425} = 0{,}03765 \dots$$

b) Koristeći Bayesovu formulu, imamo

$$P(B_i/A) = \frac{\frac{10}{17} \cdot 0{,}05}{P(A)} = \frac{\frac{5}{170}}{\frac{16}{425}} = \frac{425}{544} = 0{,}78125.$$

Upotreba Bayesove formule u financijskim predviđanjima može pomoći pri pročišćavanju procjena vjerojatnosti pomoću intuitivnog procesa. Tako npr. for-

4 http://stattrek.com/probability/bayes-theorem.aspx (10.5.2017.)

mulu koristimo kako bi saznali kako promjena kamatnih stopa utječe na vrijednost indeksa burze kao što je opisano u sljedećem primjeru.

Primjer 3. Izračunajte kako bi promjena kamatnih stopa utjecala na vrijednost indeksa burze za podatke prikazane u tablici 1[5].

TABLICA 1. PODACI O KAMATNIM STOPAMA I CIJENI DIONICE

		Kamatne stope		
Cijena dionice		Pad	Povećanje	Frekvencija jedinice
	Pad	200	950	1 150
	Povećanje	800	50	850
	Ukupno	1 000	1 000	2 000

Izvor: http://www.investopedia.com/articles/financial-theory/09/bayesian-methods-financial-modeling.asp

- Uvodimo oznake:

$$P(SI) = vjerojatnost\ povećanja\ indeksa\ dionice$$
$$P(SD) = vjerojatnost\ smanjenja\ indeksa\ dionice$$
$$P(ID) = vjerojatnost\ smanjanja\ kamatne\ stope$$
$$P(II) = vjerojatnost\ povećanja\ kamatne\ stope$$
$$P(SD/II) = vjerojatnost\ smanjenja\ indeksa\ dionice\ s\ obzirom\ na\ vjerojatnost\ povećanja\ kamatne\ stope$$
$$P(II/SD) = vjerojatnost\ povećanja\ kamatne\ stope\ s\ obzirom\ na\ vjerojatnost\ smanjenja\ indeksa\ dionice$$

Primijenimo Bayesovu formulu

$$P(SD/II) = \frac{P(SD)P(II/SD)}{P(II)}.$$

Uvrštavanjem podataka dobivamo

$$P(SD/II) = \frac{\left(\frac{1\,150}{2\,000}\right)\left(\frac{950}{1\,150}\right)}{\left(\frac{1\,000}{2\,000}\right)} = \frac{0{,}575 \cdot 0{,}826}{0{,}5} = 0{,}9499 \approx 95\ \%.$$

95 % je a posteriori vjerojatnost.

U tablici je vidljivo da smo promatrali 2 000 dionica od kojih je 1150 pokazalo pad indeksa. Ukoliko izračunamo a priori vjerojatnost koja se temelji na prijašnjim podacima vidimo da je

$$\frac{1\,150}{2\,000} = 0{,}575 \approx 57{,}5\ \%$$

Ova vjerojatnost ne uzima u obzir informacije o kamatnim stopama i potrebno ju je ažurirati. Izračunavanjem uvjetne vjerojatnosti pomoću Bayesove formule uvrštavanjem vjerojatnosti povećanja kamatne stope dobili smo informaciju o kretanju burze odnosno, očekujemo njeno smanjenje od 57,5 % do 95 %.

Bayesova formula može se koristiti u pojedinačnim tvrtkama s obzirom na promjene u njihovim bilancama, obveznicama, kreditnom rejtingu i mnogim drugim primjerima.

[5] http://www.investopedia.com/articles/financial-theory/09/bayesian-methods-financial-modeling.asp (10.5.2017.)

5. ZAKLJUČAK

Ukoliko se želi pronaći vjerojatnost ranijeg događaja, pod uvjetom da je nastupio kasniji događaj, koristi se Bayesov teorem. Bayesov teorem se koristi u raznim područjima primjene zbog svoje prilagođenosti potrebama korisnika i relativno lake dostupnosti. Razumijevanje Bayesova teorema i uvjeta pri kojima se može koristiti omogućava njegovu lakšu primjenu. Stoga postoji potreba za objašnjavanjem teoretske podloge koja je ovdje i navedena uz konkretiziranje na primjerima iz svakodnevnice i ekonomije. Zasigurno postoje i razna druga područje gdje se može primijeniti, a to otvara prostor za dodatna istraživanja.

LITERATURA

1. Barnett, R. A., Ziegler, M. R., Byleen, K. E. (2006): Primjenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti. Zagreb: Mate d.o.o., Zagreb
2. Galić, R. (2011): Vjerojatnost i statistika, Elektrotehnički fakultet Osijek, Osijek
3. Pauše, Ž. (2003): Vjerojatnost, Informacija, Stohastički procesi, Školska knjiga, Zagreb
4. N. Sarapa (2002): Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb
5. https://www.countbayesie.com/blog/2015/2/18/bayes-theorem-with-lego (10.5.2017.)
6. http://www.investopedia.com/articles/financial-theory/09/bayesian-methods-financial-modeling.asp (10.5.2017.)
7. http://www.mathos.unios.hr/~bruckler/vjerojatnost.pdf (10.5.2017.)
8. http://stattrek.com/probability/bayes-theorem.aspx (10.5.2017.)