math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Vizualni i kratki dokazi - prilog kreativnoj nastavi matematike (1.dio)

Darko Veljan,
darko.veljan@math.hr
Ivana Marušić,
imarusic@vtsbj.hr

Uvod

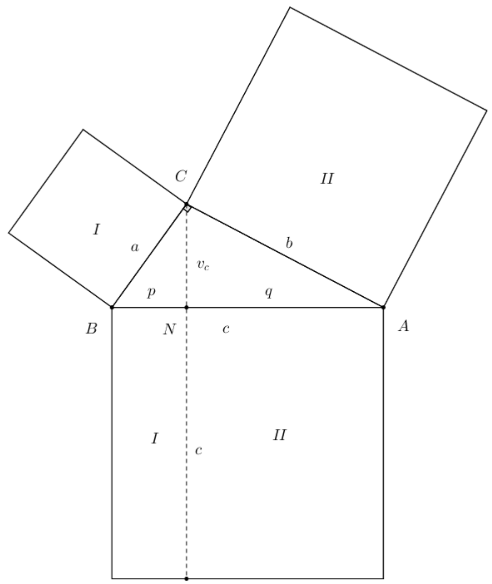
Odavna se smatra da su najljepši, najelegantniji i najuvjerljiviji dokazi u matematici oni koje možemo prikazati jednom razumljivom slikom (uz možda po koju riječ) ili nekom kratkom rečenicom/formulom. Slikovni ili vizualni dokazi se još kolokvijalno nazivaju dokazi bez riječi. Učenici, studenti, nastavnici, znanstvenici i drugi često mogu s lakoćom razumijeti upečatljive jednostavne slike i/ili kratke pričice i možda ih trajno usvojiti i zapamtiti. Uostalom, kaže se dobra slika vrijedi tisuću riječi, dobra slika pola zadatka ili kratka priča-sve jasno. S takvom slikom ili kratkim opisom dokaza možemo unaprijediti i poboljšati kretivnu nastavu matematike, konkretno pridonijeti njenom kurikularnom unaprijeđenju i učiniti nastavu dinamičnijom, zanimljivijom i zabavnijom. U ovom članku prikazat ćemo neke od takvih dokaza.

Članak posvećujemo našim dragim profesorima, prijateljima, kolegama i koautorima akademiku Sibi Mardešiću ($1927. - 2016.$) i prof.dr.sc. Borisu Pavkoviću ($1931. - 2006.$) (Slika 16 na kraju članka).

1 Pitagorin poučak

Pitagorin poučak[1] jedan je od najistaknutijih, najcitiranijih i najpoznatijih poučaka u matematici uopće. Poznato je oko 400 različitih dokaza tog jednostavno veličanstvenog poučka.

Dokaz 1. Hrvatski rečeno, u pravokutnom je trokutu četvorina (kvadrat) nad najvećom stranicom jednaka zbroju četvorina nad ostale dvije stranice (vidjeti Sliku 1).

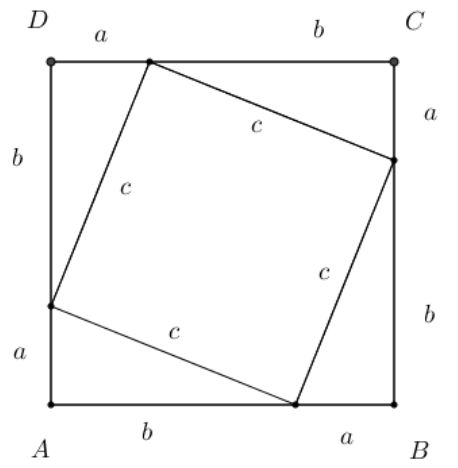


Slika 1: Geometrijski dokaz Pitagorina poučka 1

Odnosno formulom

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= pc \\ b^2 &= qc \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Dokaz 2. Četvorina nad zbrojem dviju manjih stranica je četvorina nad najvećom stranicom uvećana za četiri površine tog pravokutnog trokuta (vidjeti Sliku 2.).



Slika 2: Geometrijski dokaz Pitagorina poučka 2

Odnosno formulom

$$P_{a+b}^{(4)} = P_c^{(4)} + 4P_{\triangle(4)} \tag{2}$$

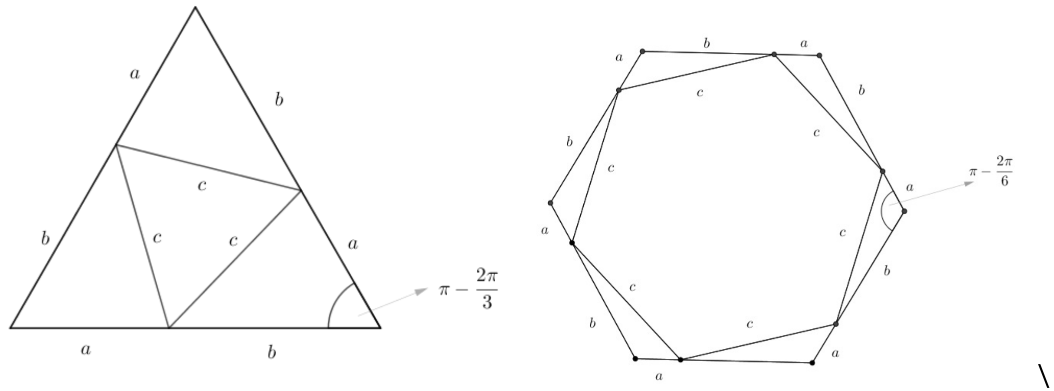
tj.

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \implies a^2 + b^2 = c^2. \tag{3}$$

Neka je $\triangle(n)$ trokut s kutom $\pi - \frac{2\pi}{n}$ (ili $\frac{2\pi}{n}$), za bilo koji cijeli broj $n \geq 3$. Neka su stranice uz taj kut a i b, te c stranica nasuprot tome kutu. Označimo s $P_x^{(n)}$ površinu pravilnog n- terokuta stranice x, a s $P_{\triangle(n)}$ površinu takvog trokuta. Površina pravilnog n-terokuta nad zbrojem $a+b$ stranica trokuta uz kut $\pi - \frac{2\pi}{n}$ (ili $\frac{2\pi}{n}$) je površina pravilnog n-terokuta nad stranicom c trokuta uvećana za n površina tog trokuta $\triangle(n)$ [6].
Dakle,

$$P_{a+b}^{(n)} = P_c^{(n)} + nP_{\triangle(n)}. \tag{4}$$

Pogledajmo za $n = 3$ i $n = 6$ dokaz bez riječi (vidjeti Sliku 3.). Za $n = 4$, to je Pitagorin poučak.



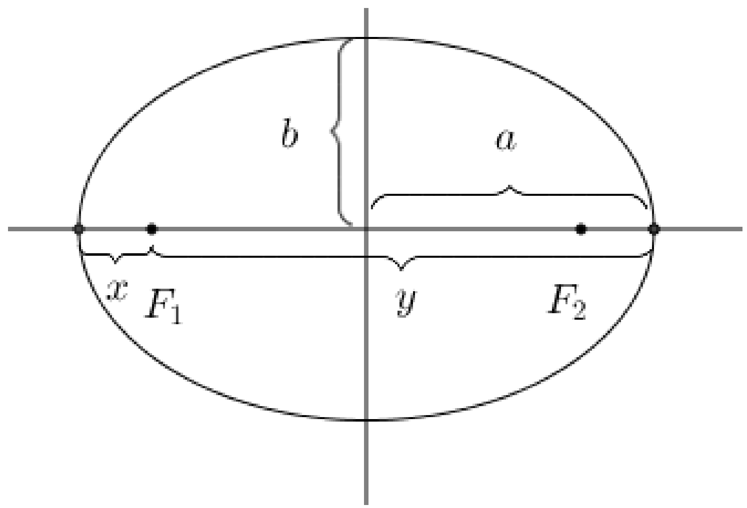
Slika 3: Geometrijski dokaz poopćenog Pitagorina poučka 3

2 Aritmetičko-geometrijska (A-G) nejednakost

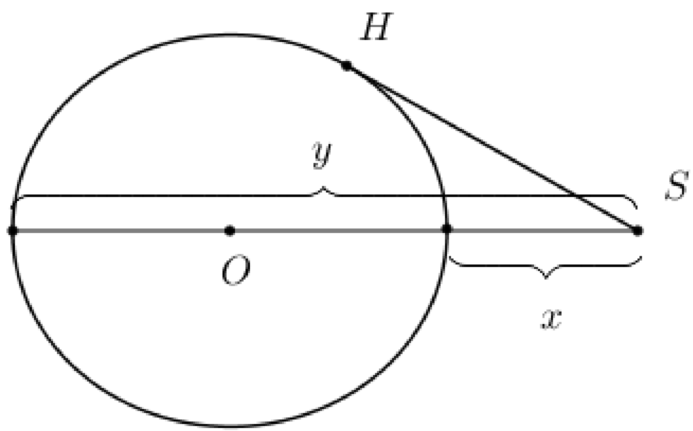
Za pozitivne (realne) brojeve x, y vrijedi $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$. Algebarski dokaz je doslovce trivijalan

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0. \tag{5}$$

Pogledajmo naše geometrijske dokaze



Slika 4: ˝Astronomski dokaz˝



Slika 4: ˝Satelitski dokaz˝

Slika 4: Geometrijski dokazi A-G nejednakosti

Dakle, u prvom dokazu (Slika 4) vidimo da se radi o elipsi za koju vrijedi

$$\frac{x+y}{2} = a \geq b = \sqrt{xy}, \tag{6}$$

gdje je a velika poluos, a b mala poluos i vrijedi da je $a \geq b$, jer je $x = a - e$, a $y = a + e$ (gdje je e linearni ekscentricitet) pa stoga $b^2 = a^2 - e^2 = xy$

U drugom dokazu (Slika 4) je $|\overline{OS}|$ udaljenost satelita S do središta Zemlje O, a $|\overline{SH}|$ udaljenost do horizonta. Zaključujemo

$$\frac{x+y}{2} = |\overline{OS}| \geq |\overline{SH}| = \sqrt{xy}. \tag{7}$$

Opća A-G nejednakost za pozitivne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = G. \tag{8}$$

Kombinatorni dokaz provodimo tako da tvrdnju prvo dokažemo za pozitivne cijele brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Neka su X_i i Y konačni disjunktni skupovi, gdje je $i = 1, 2, \ldots, n$ i vrijedi

$$|X_i| = nx_i \quad \text{i} \quad |Y| = nA = \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{9}$$

Konstruirajmo injekciju $f\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y \times \cdots \times Y = Y^n$ čime dokazujemo da je

$$(nx_1) \cdot (nx_2) \cdots (nx_n) \leq (nA)^n. \tag{10}$$

Prvo, za $n = 2$, promatramo dva skupa S i T, pri čemu je $|S| = a < b = |T|$ i neka je $t_0 \in T$. Zbog $a \leq b - 1$ postoji injekcija $g\colon S \to T \setminus \{t_0\}$.
Definirajmo injekciju

$$f\colon S \times T \to (S \cup \{t_0\}) \times (T \setminus \{t_0\}), \quad f = f_{t_0,g} \tag{11}$$

formulom

$$f(s,t) = (s,t) \quad \text{za} \quad t \neq t_0 \quad \text{i} \quad f(s,t_0) = (t_0, g(s)). \tag{12}$$

Ovo je, zapravo, kombinatorni dokaz nejednakosti

$$ab \leq (a+1)(b-1). \tag{13}$$

Ako su svi x_i jednaki u (8) dobivamo jednakost. Provjerimo što se događa ako nisu svi x_i jednaki. Postoje i, j takvi da je $x_i < A$ i $x_j > A$. Odaberimo $z_1 \in X_j$, i premjestimo ga u X_i te konstruirajmo injekciju

$$f_{z_1,g_1}\colon X_i \times X_j \to (X_i \cup \{z_1\}) \times (X_j \setminus \{z_1\}) = X_i^{(1)} \times X_j^{(1)}. \tag{14}$$

Pomoću nje dobivamo injekciju

$$f_1\colon \prod_{k=1}^{n} X_k \to \prod_{k=1}^{n} X_k^{(1)} \tag{15}$$

gdje je $X_k^{(1)} = X_k$, za $k \neq i, j$,

$$X_i^{(1)} = X_i \cup \{z_1\}, \;\; X_j^{(1)} = X_j \setminus \{z_1\} \tag{16}$$

i s novim produktom nastavimo na isti način s injekcijom

$$f_2\colon \prod_{k=1}^{n} X_k^{(1)} \to \prod_{k=1}^{n} X_k^{(2)} \tag{17}$$

itd. sve dok ne dostignemo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\left|X_k^{(m)}\right| = |Y|$ za sve $1 \leq k \leq n$, i bijekciju

$$h\colon \prod_{k=1}^{n} X_k^{(m)} \to Y^n. \tag{18}$$

Kompozicija funkcija

$$f := h \circ f_m \circ \ldots \circ f_1\colon \prod_{k=1}^{n} X_k \to Y^n \tag{19}$$

tražena je injekcija.
Ukoliko su $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ bilo koji realni brojevi, onda se prethodno rezoniranje primijeni na sve 2^n A-G nejednakosti primijenjene na sve "podove" $\lfloor \; \rfloor$ i "stropove" $\lceil \; \rceil$ svih brojeva, pa zbog konveksnosti i neprekidnosti tvrdnja vrijedi i za njih.
Topološki dokaz.

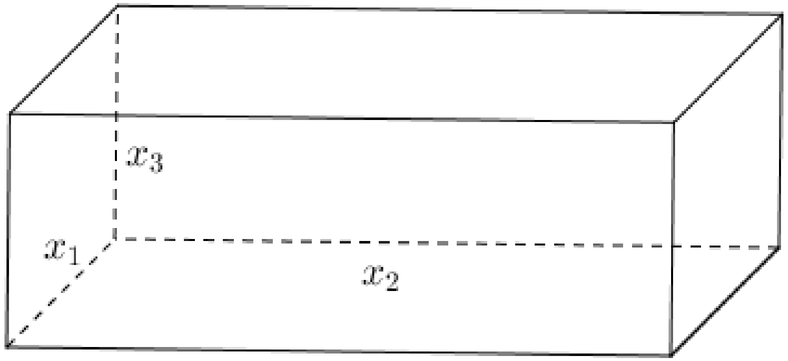
$$\max\left\{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \;: x_i \geq 0, \;\; \sum x_i = S\right\} \tag{20}$$

se dostiže u točki $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = S/n$ To je zbog kompaktnosti simpleksa i neprekidnosti produkta. Stoga je

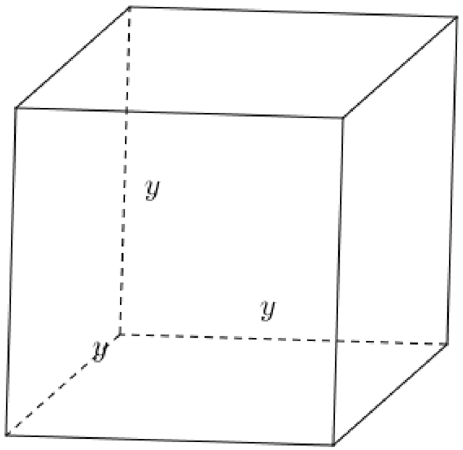
$$S/n \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,. \tag{21}$$

Geometrijska interpretacija A-G nejednakosti je

$$2^{n-1}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) \geq n \cdot 2^{n-1} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}. \tag{22}$$



Slika 7: Kvadar B



Slika 7: Kocka C

Slika 7: Geometrijski dokaz A-G nejednakosti

Lijeva strana ukupan je zbroj duljina bridova kvadra (kutije) tj. to je opseg (perimetar) $per(B)$ kutije B, čiji su bridovi u jednom vrhu $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Desna strana je također opseg $per(C)$ kocke C brida \sqrt[n]{x_{1}\cdot x_{2} \cdots x_{n}}\ (=y) istog volumena $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ kao B. Dakle, A-G nejednakost je

$$vol(B) = vol(C) \Longrightarrow per(B) \geq per(C)$$

i izriče izoperimetrijski poučak: Kocka ima među svim kvadrima istog volumena najmanji opseg (najmanje žice treba za kocku istog volumena). Promotrimo opću izoperimetrijsku nejednakost

$$(S/n)^n \geq \omega_n V^{n-1}, \tag{23}$$

pri čemu je $V = vol_n(K)$, $S = vol_{n-1}(\partial K)$, tj. V je n-dimenzionalni volumen n-dimenzionalnog konveksnog tijela $K \subset \mathbb{R}^n$ (kompaktni, konveksni skup s nepraznom nutrinom), a S je volumen $(n-1)$-dimenzionalnog ruba ∂K (″površine″ tijela K).
ω_n je volumen jedinične kugle $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| \leq 1\}$. Poznato je da $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$, gdje je

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{24}$$

gama funkcija; $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$, $\omega_4 = \frac{1}{2}\pi^2$, ... Jednakost se u izoperimetrijskoj nejednakosti dostiže ako i samo ako je K kugla. Od svih tijela jednake površine kugla ima najveći obujam. Standardni dokaz izoperimetrijske nejednakosti se (aproksimacijama) svodi na Brunn-Minkowskijevu nejednakost za neprazne kompaktne skupove $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$[vol\,(X+Y)]^{\frac{1}{n}} \geq [vol\,(X)]^{\frac{1}{n}} + [vol\,(Y)]^{\frac{1}{n}}, \tag{25}$$

pri čemu je $X + Y = \{x + y \colon x \in X, y \in Y\}$ vektorski zbroj skupova. Ovo se pak (ponovno aproksimacijama) svodi na kvadre (kutije) s bridovima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ u jednom od vrhova na nejednakost

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{\frac{1}{n}} \geq \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^{n} (y_i)^{\frac{1}{n}}. \tag{26}$$

Zbog A-G nejednakosti to je ekvivalentno s

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_i + y_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{x_i + y_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_i + y_i}\right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{x_i + y_i}\right) = 1. \tag{27}$$

Osim standardnih dokaza indukcijom, ili rabeći konveksnost postoje i manje standardni: algebarski, topološki, fizikalni (termodinamički) i drugi dokazi A-G nejednakosti kao i mnogobrojne primjene i uz to vezani problemi s eliptičkim integralima.
Za dane realne brojeve $x, y > 0$, definirat ćemo aritmetičko-geometrijsku sredinu $AGM(x, y)$. Promatramo dva niza $(x_n)_{n\geq 0}$ i $(y_n)_{n\geq 0}$, $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$. Pri tom je (x_n) padajući, a (y_n) rastući niz, dakle, omeđeni i monotoni, pa zaključujemo da su konvergentni. Neka je $x_n \to X$, $y_n \to Y$. Tada iz $X = \frac{1}{2}(X + Y)$ slijedi $X = Y$. Zajednički limes L je $L = AGM(x, y)$. Označimo

$$I(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(x \cdot \cos\varphi)^2 + (y \cdot \sin\varphi)^2}} \tag{28}$$

potpuni eliptički integral 1. vrste. Zamjenom varijabli

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\theta}{(x+y) + (x-y)\sin^2\theta} \tag{29}$$

dobivamo

$$I(x,y) = I\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right). \tag{30}$$

Stoga je

$$I(x,y) = I(x_0, y_0) = I(x_1, y_1) = I(x_2, y_2) = \ldots = I(L, L) = \frac{\pi}{2L} \tag{31}$$

jer je $I(x, x) = \frac{\pi}{2x}$.
Dakle,

$$AGM(x,y) = \frac{\pi}{2I(x,y)}. \tag{32}$$

Vrijedi AGM profinjenje aritmetičko-geometrijske nejednakosti:

$$\sqrt{x}y = G(x,y) \leq AGM(x,y) \leq A(x,y) = \frac{x+y}{2}. \tag{33}$$

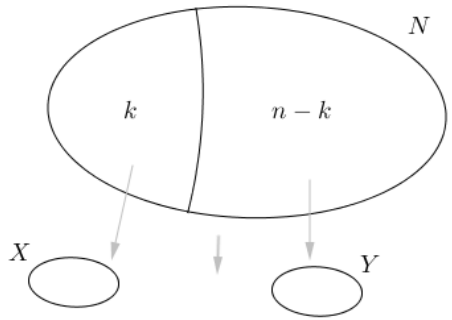
Znači AGM na prirodni način profinjuje aritmetičko-geometrijsku nejednakost. [7]

3 Newtonov binomni poučak

Važan poučak s mnoštvom inačica glasi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{34}$$

Iznijet ćemo geometrijsko-kombinatorni dokaz. Prisjetimo se, ako su X, N konačni skupovi, onda X^N označava skup svih funkcija $N \to X$ i ako je broj elemenata $|X| = x$ i $|N| = n$, onda je $|X^N| = x^n$. Promatramo sva preslikavanja $N \to X \cup Y$ iz N u disjunktnu uniju od X i Y pri čemu je $|X| = x$ i $|Y| = y$. Neka se k elemenata preslika u X, a $n-k$ u Y. Broj k-članih podskupova u N je $\binom{n}{k}$.



Slika 10: Konceptualni prikaz

Binomni poučak neposredno slijedi primjenom načela umnoška i zbroja. Na isti se način dokazuju i multinomne formule:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}. \tag{35}$$

Isti dokaz koristimo za injekcije. Prisjetimo se, za skup $X^{\underline{N}}$ injekcija $N \to X$ imamo:

$$|X^{\underline{N}}| =: x^{\underline{n}} = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-n+1). \tag{36}$$

Prema tome, s istim dokazom zaključujemo

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} \cdot y^{\underline{n-k}}. \tag{37}$$

Na isti način dobivamo i Vandermondevu konvoluciju

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^{\underline{n}} = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{\underline{n_1}} \cdots x_k^{\underline{n_k}}. \tag{38}$$

Ona broji sve injekcije $N \to X_1 \cup \cdots \cup X_k$, $|X_i| = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ iz N u disjunktnu uniju $X_1, \ldots, X_k$. Prisjetimo se

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}. \tag{39}$$

Spomenimo još i Chu-Vandermondeov identitet

$$\binom{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{n} = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \prod_{i=1}^{k} \binom{x_i}{n_i}. \tag{40}$$

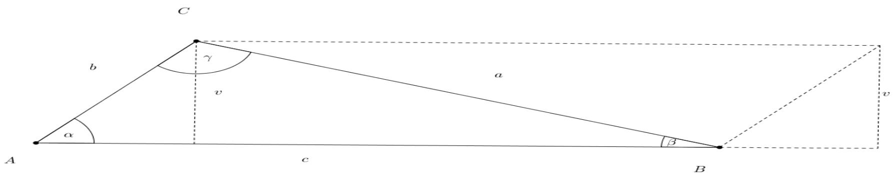
Postoji mnogo formula i identiteta koji su posljedica ili su ekvivalentni binomnom poučku.

4 Sinusov i kosinusov poučak te Heronova formula

Sinusov i kosinusov poučak jedni su od temeljnih poučaka iz geometrije trokuta. Sinusi kutova u trokutu odnose se kao duljine tim kutovima nasuprotnih stranica tog trokuta. Ekvivalentan mu je kosinusov poučak\footnote {Kosinusov je poučak u današnjem obliku prvi iznio perzijski matematičar al Kashi 1427. godine, a kasnije 1565. godine, neovisno francuski matematičar F. Vi\`ete.}(a ekvivalentan Pitagorinom poučku) trokuta ABC i glasi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{41}$$

Prikažimo dva dokaza. Dokaz 1.



Slika 11: Trokut ABC

Površina trokuta ABC je (vidjeti Sliku 11)

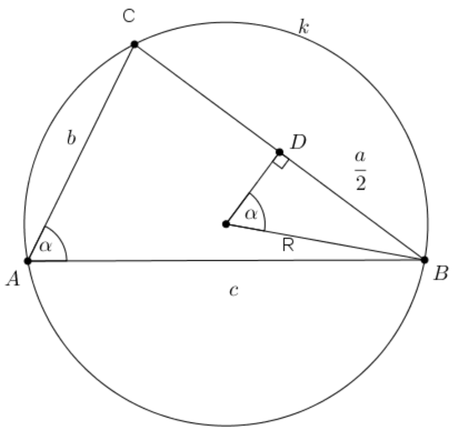
$$2P = cv = cb \sin \alpha. \tag{42}$$

Analogno,

$$2P = ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ca \sin \beta \qquad\qquad / : abc \tag{43}$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \left(= \frac{2P}{abc} \right). \tag{44}$$

<u>Dokaz 2.</u>



Slika 12: Trokut ABC

Iz trokuta ABC (vidjeti Sliku 12) imamo

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}. \tag{45}$$

Dakle,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} (= 2R)\,. \tag{46}$$

Iz sinusovog i kosinusovog (a zapravo Pitagorinog) poučka imamo

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1 \implies \left(\frac{2P}{ab}\right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 = 1 \implies (4P)^2 = (2ab)^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2. \tag{47}$$

To je Heronova formula. Možemo je zapisati i ovako:

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^4+b^4+c^4\right)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c) \tag{48}$$

Odnosno

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{-\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}; \tag{49}$$

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2s\,(2s-a)\,(2s-2b)(2s-2c)}. \tag{50}$$

Neka su $e_1 = a+b+c$, $e_2 = ab+bc+ca$, $e_3 = abc$ elementarne simetrične funkcije, tada imamo

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{e_1(e_1-2a)(e_1-2b)(e_1-2b)(e_1-2c)} = \frac{1}{4}\sqrt{e_1(4e_1e_2 - e_1^3 - 8e_3)}. \tag{51}$$

Također,

$$P = \frac{4}{3}\sqrt{t(t-t_a)(t-t_b)(t-t_c)}, \tag{52}$$

gdje su t_a, t_b, t_c težišnice, $t = \frac{1}{2}(t_a + t_b + t_c)$. Odnosno

$$P^{-1} = 4\sqrt{v^{-1}(v^{-1} - v_a^{-1})(v^{-1} - v_b^{-1})(v^{-1} - v_c^{-1})}, \tag{53}$$

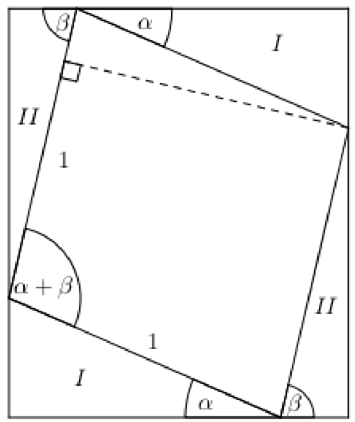
gdje su v_a, v_b, v_c visine, $v^{-1} = \frac{1}{2}\left(v_a^{-1} + v_b^{-1} + v_c^{-1}\right)$.

Ako je R radijus opisane kružnice k trokutu ABC (vidjeti Sliku 12) imamo

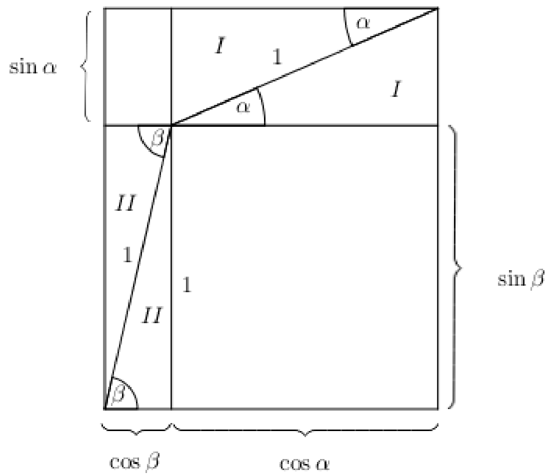
$$P = (2R)^2\sqrt{S(S-\sin\alpha)(S-\sin\beta)(S-\sin\gamma)}, \tag{54}$$

gdje je $S = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.
Jeste li uočili: Pitagora $\Longleftrightarrow$ Heron? Čak što više, sinusov poučak $\Longleftrightarrow$ kosinusov poučak $\Longleftrightarrow$ Pitagorin poučak $\Longleftrightarrow$ Heronova formula.

5 Sinus zbroja (adicijska formula za sinus)



Slika 13:



Slika 13:

Slika 13: Geometrijski dokaz sinusa zbroja

Površina romba na slici 13 je $\sin(\alpha+\beta)$. Usporedimo površinu na slici 13. Vidimo

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta. \tag{55}$$

Ekvivalentno (jer je $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$)

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta. \tag{56}$$

Dijeljenjem se dobiva formula za $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ i $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)$.

Zaključak

Pokazali smo kako možemo kombinirati različite tehnike, vizualne i formalne, kako bi došli do željenih rezultata, a ponekad će nam jedna skica dati i više različitih zaključaka ili otkriti i nešto novo.

Bibliografija

[1] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[2] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.

[3] I. N. Bronštejn, suradnici: *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[4] S. Mardešić: *Sjećanje na profesora Borisa Pavkovića (1931.-2006.)*, Glasnik Matematički, 41 (61) (P) (2006.), 441-415.

[5] V. Volenec: *Popis i opis znanstvenih radova prof. dr. sc. Borisa Pavkovića*, Glasnik Matematički, 41 (61) (P) (2006.), 411-413.

[6] D. Veljan: *The 2500-year -old-pythagorean theorem*, Mathematics Magazine, 73 No. 4 (2000.), 259-272.

[7] D. Veljan: *The AM-GM inequality from different viewpoints*, Elem. Math. 72 (2017), 24-34.

[8] D. Svrtan, D. Veljan: *Non-Euclidean versions of some classical triangle inequalities*, Forum Geometricorum, 12 (2012.), 197-209.

[9] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya: *Inequalities*, 2nd. ed. , Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[10] J. M. Steele: *The Cauchy-Schwarz Master Class, MAA*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[11] D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[12] D. Veljan: *Čarobne četvorine (iliti magični kvadrati)*, Poučak,15 (57) (2014.), 12-23.

[13] C. A. Pickover: *Wonders of Numbers*, Oxford University Press, New York, 2002.

[14] C. A. Pickover: *The Math Book*, Sterling, New York, 2009.

[15] M. Fiedler: *Matrices and graphs in geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[16] D. Veljan: *The sine theorem and inequalities for volumes of simplices and determinants*, Linear algebra and its applications, 219 (1995.), 79-91.

[17] A. Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb, 2000.

[18] T. Koshy: *Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications*, Springer, New York, 2014.

[19] D. Veljan, J. Nash i L. Nirenberg: *Abelovci za 2015. godinu*, Matematičko fizički list, 66 (2015.), 31-36.

[20] M. Raussen, C. Skau : *Interview with Abel Laureate John F. Nash Jr.*, Notices of the AMS, 63 (5),(2016.), 486-491.

[21] D. Veljan : *Matematičar i teorijski fizičar, akademik Vladimir Varićak*, Prirodoslovlje 16(2016.), 125-152.

[22] D. Klobučar : *Matematika naša svagdašnja I, II*, Element , Zagreb, 2014.

[23] B. J. McCartin: *Mysteries of the Equilateral Triangle*, (javno dostupno na: http://www.m-hikari.com/mccartin-2.pdf, 7.2.2017.)

[24] J. Milnor : *Topology through the centuries: Low dimensional manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (4) (2015.), 545-584.

[25] S. Mardešić : *Kako sam postao i ostao matematičar*, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb, 2016.

Slika 16: akademik Sibe Mardešić

Slika 16: prof.dr.sc. Boris Pavković

Slika 16:

---

[1]Prvi put evidentiran oko 500. g. pr. Kr., a bio je poznat i starokineskim dinastijama barem 500 godina ranije.

ISSN 1334-6083