Osječki matematički list 17 (2017), 151-160

Bézoutova lema i Blankinshipova metoda

Ljubica Baćić Đuračković,* Vojislav Đuračković†

Sažetak

U ovom članku prikazana je Bézoutova lema kao direktna posljedica Euklidovog algoritma. Opisana je praktična i brza metoda za određivanje koeficijenata u Bézoutovoj lemi, poznata pod nazivom Blankinshipova metoda.

Ključne riječi: *Euklidov algoritam, Bézoutova lema, Blankinshipova metoda*

Bézout's lemma and Blankinship's method

Abstract

In this article we present the Bézout's lemma as a direct consequence of the Euclid's algorithm, and describe a practical and fast method for determining the coefficients in the Bézout's lemma, known as the Blankinship's method.

Kexwords: *Euclid's algorithm, Bézout's lemma, Blankinship's method*

*OŠ Nikole Andrića, Vukovar, email: ljubica.bacic@skole.hr
†OŠ Negoslavci, Negoslavci, email: vojislav.djurackovic@gmail.com

1 Uvod

Već se u 5. razredu osnovne škole uči kako odrediti najveći zajednički djelitelj dva broja. Pri tome se koristi rastavljanje brojeva na proste faktore i uočavanje zajedničkih djelitelja. No, ta metoda nije baš praktična kad tražimo najveći zajednički djelitelj dva velika broja. U tom slučaju zgodno je koristiti već svima poznat Euklidov algoritam. No, može li nam Euklidov algoritam pomoći pri rješavanju sljedećeg problema iz poznatog američkog filma „Umri muški 3"?

Problem. John McClain i Zeus moraju deaktivirati bombu u parku. To će učiniti samo ako na vagu stave balon s 4 litre vode pri čemu na raspolaganju imaju balone od 5 litara i 3 litre. Kako će izmjeriti točno 4 litre vode korištenjem samo balona od 5 litara i 3 litre?

Étienne Bézout (1730.–1783.) francuski matematičar koji je dao doprinos u teoriji eliminacija

U rješavanju ovog problema pomoći će nam francuski matematičar Étienne Bézout. Obiteljska tradicija tražila je da bude sudac poput oca i djeda. Nakon što je pročitao neke Eulerove radove, odlučio se posvetiti matematici. 1763. godine postao je profesor u školi za pomorske časnike *Gardes du Pavillon et de la Marine*. Poznat je kao pisac udžbenika, ali i po radu na algebri, posebno na jednadžbama. Početkom 19. stoljeća njegovi su udžbenici prevedeni na engleski jezik te su značajno utjecali na oblik i sadržaj američkog obrazovanja u 19. stoljeću. Proučavao je sustave linearnih jednadžbi i teoriju eliminacije, uključujući sustavnu uporabu determinanti. Dao je rezultate slične Cramerovom pravilu i predstavio Bézoutov teorem, prema kojem dvije algebarske krivulje stupnjeva m i n imaju mn zajedničkih točaka. Poznat je i po Bézoutovoj lemi koju ćemo u nastavku detaljno objasniti.

2 Bézoutova lema

Prisjetimo se prvo Teorema o dijeljenju s ostatkom i Euklidovog algoritma. No, za to nam je potreban pojam djeljivosti. Neka su a i b cijeli brojevi, $a \neq 0$. Kažemo da a *dijeli* b i pišemo $a \mid b$ ako postoji cijeli broj d takav da je $b = ad$. Ako a ne dijeli b, onda pišemo $a \nmid b$.

Teorem 2.1 (Teorem o dijeljenju s ostatkom). Ako su a, b cijeli brojevi, $b > 0$, onda postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a = bq + r \qquad \text{i} \quad 0 \leq r < b.$$

Kažemo da je d *zajednički djelitelj* brojeva a i b ako $d \mid a$ i $d \mid b$. Pritom barem jedan od brojeva a i b treba biti različit od nule. Najveći među njima zovemo *najveći zajednički djelitelj* brojeva a i b i pišemo (a, b) (ili $D(a, b)$,

$NZD(a,b)$ ili, u stranoj literaturi, $gcd(a,b)$). U nastavku rada koristit ćemo oznaku $D(a,b)$. Za cijele brojeve a i b kažemo da su *relativno prosti* ako je $D(a,b)=1$.

Euklidov algoritam. Za cijele brojeve a i b, $b>0$, takve da b ne dijeli a uzastopnom primjenom Teorema o dijeljenju s ostatkom dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1, && 1 \le r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2, && 1 \le r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, && 1 \le r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, && 1 \le r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + r_{n+1}, && r_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Niz jednakosti je konačan, jer je $b > r_1 > r_2 > \cdots > r_n$. Posljednji ostatak različit od 0, r_n, je najveći zajednički djelitelj brojeva a i b, tj. $r_n = D(a,b)$.

Osim što je brz i efikasan, Euklidov algoritam omogućava nam da svaki ostatak prikažemo kao linearnu kombinaciju brojeva a i b. Naime, iz prve jednakosti vidimo da je $r_1 = a - q_1 b$. Ako to uvrstimo u drugu jednakost, lako dobivamo $r_2 = -q_2 a + (1 + q_2 q_1) b$. Analognim postupkom dobili bismo izraz za $r_n = D(a,b)$ o čemu govori sljedeća lema koju s obzirom na prethodno izneseno navodimo bez dokaza.

Lema 2.1 (Bézoutova lema). *Za sve pozitivne cijele brojeve a i b postoje cijeli brojevi x i y takvi da je*

$$D(a,b) = xa + yb.$$

No, možemo li riješiti Johnov i Zeusov problem pomoću Bézoutove leme? Uočimo da su brojevi 5 i 3 relativno prosti tj. $D(a,b)=1$. Dakle, Bézoutova lema pomaže samo u slučaju da trebamo izmjeriti 1 litru vode korištenjem samo balona od 5 litara i 3 litre. Lako se pogodi da je $1 = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3$. Postoji li računski postupak za dobivanje brojeva -1 i 2? Odgovor nam daje sljedeća metoda.

3 Blankinshipova metoda

Davne 1963. godine W. A. Blankinship je u časopisu *American Mathematical Monthly* predstavio jednostavnu metodu kako odrediti cijele brojeve x i y te $D(a,b)$ iz Bézoutove leme. Za razliku od Euklidovog algoritma, ovu je metodu lako vizualizirati, programirati na računalu, te daje koeficijente x i y. Najveća prednost Blankinshipove metode je da se istovremeno može izračunati najveći zajednički djelitelj nekoliko cijelih brojeva i koeficijente u Bézoutovoj lemi. Radi jednostavnosti, pogledajmo slučaj kada se traži najveći zajednički djelitelj dva broja.

Ideja je da za zadane $a > b > 0$ formiramo matricu

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i prilagodimo Gaussovu metodu eliminacije pivotiranjem, na cijele brojeve. Iz Euklidovog algoritma imamo $a = q_1 b + r_1$, tj. $a - q_1 b = r_1$ pa ako drugi redak pomnožimo s $-q_1$ i dodamo prvom, dobivamo

$$\begin{bmatrix} r_1 & 1 & -q_1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz $b = q_2 r_1 + r_2$ slijedi $b - q_2 r_1 = r_2$ pa množenjem prvog retka s $-q_2$ i dodavanjem drugom, imamo

$$\begin{bmatrix} r_1 & 1 & -q_1 \\ r_2 & -q_2 & q_1 q_2 \end{bmatrix}.$$

Postupak nastavljamo dalje sve dok ne dobijemo da su elementi prvog stupca $r_n = D(a, b)$ i $r_{n+1} = 0$, tj. dok ne dobijemo matricu oblika

$$\begin{bmatrix} D(a,b) & x & y \\ 0 & x' & y' \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 0 & x' & y' \\ D(a,b) & x & y \end{bmatrix}.$$

Kao što smo već rekli 1 litru vode možemo izmjeriti korištenjem samo balona od 5 litara i 3 litre. To zapravo znači da u balon od 5 litara trebamo dvaput uliti vodu iz balona od 3 litre te prosuti vodu iz balona od 5 litara. U balonu od 3 litre ostala je upravo jedna litra, što smo i trebali dobiti. Riješimo ovaj primjer Blankinshipovom metodom.

U našem je primjeru $a = 5$ i $b = 3$. Početna matrica je

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je $5 = 3 \cdot 1 + 2$, pa je $5 + 3 \cdot (-1) = 2$. Ako drugi redak pomnožimo s -1 i dodamo prvom, dobivamo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sad je $3 = 2 \cdot 1 + 1$ odnosno $3 + 2 \cdot (-1) = 1$ pa množenjem prvog retka s -1 i dodavanjem drugom, imamo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Na kraju, $2 = 1 \cdot 2 + 0$ odnosno $2 + 1 \cdot (-2) = 0$. Kad drugi redak pomnožimo s -2 i dodamo prvom, dobivamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Iz zadnje matrice lako iščitamo da je

$$D(a,b) = 1 \qquad \text{i} \qquad 1 = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3.$$

4 Rješenje početnog problema

Da bismo riješili početni problem, potrebno je proširiti Bézoutovu lemu.

Proširenje Bézoutove leme. Ako u $D(a,b) = xa + yb$ s obje strane dodamo $k_1 a + k_2 b$, k_1 i k_2 cijeli brojevi, imamo

$$D(a,b) + k_1 a + k_2 b = xa + yb + k_1 a + k_2 b.$$

Sređivanjem lako dobivamo jednakost

$$D(a,b) + k_1 a + k_2 b = (x + k_1)a + (y + k_2)b.$$

Kako onda riješiti Johnov i Zeusov problem? Ideja je da u dobiveni izraz $1 = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3$ dodamo $b = 3$ s obje strane jednakosti.

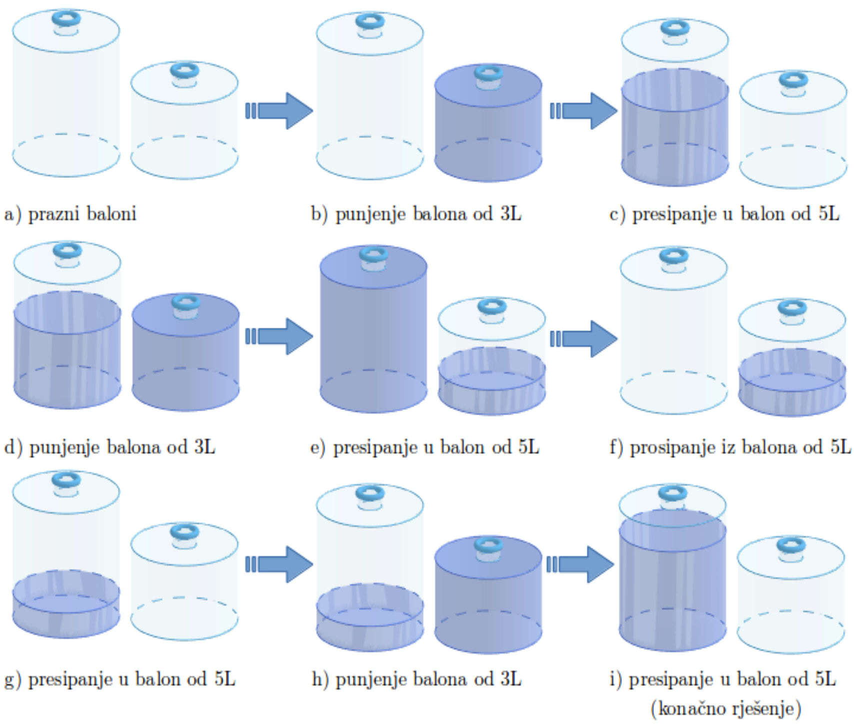
$$1 + 3 = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3$$

pa je

$$4 = -1 \cdot 5 + 3 \cdot 3.$$

Broj 4 s lijeve strane jednakosti predstavlja 4 litre vode koju John i Zeus trebaju izmjeriti, a brojevi 5 i 3 s desne strane jednakosti predstavljaju balone od 5 litara i 3 litre. Izraz $3 \cdot 3$ znači da tri puta treba sipati vodu u balon od 3 litre, dok $-1 \cdot 5$ znači da jednom treba prosuti vodu iz balona od 5 litara. Pogledajmo kojim redoslijedom treba sipati, presipati i prosipati vodu.

Prvo treba usuti vodu u balon od 3 litre pa presuti u balon od 5 litara. Potom treba opet napuniti balon od 3 litre i presuti u balon od 5 litara. Ali, sva količina vode ne može stati u balon od 5 litara pa će u balonu od 3 litre ostati točno 1 litra. Onda treba prosuti vodu iz balona od 5 litara pa u taj balon usuti litru vode iz balona od 3 litre. Na kraju, opet treba nasuti vodu u balon od 3 litre te je presuti u balon od 5 litara. Tada se u balonu od 5 litara nalaze točno 4 litre vode čime je njihov problem riješen.



Slika 1: Ilustracija rješenja problema.

Napomena 4.1. Johnov i Zeusov problem mogli smo riješiti i primjenom diofantskih jednadžbi. Prema [5, Teoremu 3.4.1.] linearna diofantska jednadžba $5x + 3y = 4$ ima rješenje ako i samo ako $D(5,3) \mid 4$. Kako je $D(5,3) = 1$, to je $x = -1$ i $y = 2$ partikularno rješenje jednadžbe $5x + 3y =$

1 tj. vrijedi

$$5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 1. \tag{1}$$

Ako jednakost (1) pomnožimo s 4, dobivamo da je $x = -4$ i $y = 8$ partikularno rješenje jednadžbe $5x + 3y = 4$. Sva cjelobrojna rješenja te jednadžbe dana su $x = -4 + 3t$, $y = 8 - 5t$, $t \in \mathbb{Z}$. Za $t = 1$ dobijemo traženo rješenje $x = -1$ i $y = 3$.

Pogledajmo još jedan primjer sličan početnom problemu.

Primjer 4.1. Ivan ima jednu kantu od 9 litara i jednu kantu od 4 litre. Kako pomoću ovih kanti može najbrže donijeti točno 6 litara vode s česme?

Rješenje. Pogledajmo prvo kako bi pomoću kanti od 9 litara i 4 litre donio točno 1 litru vode. Brojevi 9 i 4 su relativno prosti pa prema Bézoutovoj lemi treba naći brojeve x i y takve da je

$$9 \cdot x + 4 \cdot y = 1.$$

Lako se vidi da je $x = 1$ i $y = -2$. No, pokažimo to Blankinshipovom metodom. Kako je $a = 9$ i $b = 4$, početna matrica je oblika

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je $9 = 4 \cdot 2 + 1$, pa je $9 + 4 \cdot (-2) = 1$. Ako drugi redak pomnožimo s -2 i dodamo prvom, dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sad je $4 = 4 \cdot 1 + 0$ odnosno $4 + 4 \cdot (-1) = 0$ pa množenjem prvog retka s -4 i dodavanjem drugom, imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Iz zadnje matrice lako iščitamo da je

$$D(a, b) = 1 \qquad \text{i} \qquad 9 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = 1.$$

Sad s obje strane jednakosti dodamo broj 5 koji možemo zapisati kao $9 - 4$ pa je

$$9 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 9 - 4 = 1 + 9 - 4,$$

tj.

$$9 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 6.$$

Broj 6 s desne strane jednakosti predstavlja 6 litara vode koju Ivan treba donijeti s česme, a brojevi 9 i 4 s lijeve strane jednakosti predstavljaju kante od 9 litara i 4 litre. Izraz $9 \cdot 2$ znači da treba dvaput sipati vodu u kantu od 9 litara, dok $4 \cdot (-3)$ znači da treba triput prosuti vodu iz kante od 4 litre. Pogledajmo detaljno kako je to Ivan napravio.

Prvo je nasuo vodu u kantu od 9 litara. Potom je iz te kante presuo vodu u kantu od 4 litre, te je prosuo vodu iz kante od 4 litre. Isti postupak je ponovio još jednom nakon čega mu je u kanti od 9 litara ostala 1 litra. Tu litru je presuo u kantu od 4 litre. Opet je nasuo vodu u kantu od 9 litara te je iz te kante dopunio kantu od 4 litre (stalo je još 3 litre). Prosuo je vodu iz kante od 4 litre pa mu je u kanti od 9 litara ostalo točno 6 litara vode. ◄

Najveća prednost Blankinshipove metode vidi se u sljedećem primjeru.

Primjer 4.2. U jednoj vinariji imaju dekantere veličine 360 ml, 306 ml i 234 ml. Koju najmanju količinu vina mogu izmjeriti? Kako će najbrže izmjeriti točno 36 ml vina?

Rješenje. Najmanja količina vina koju mogu izmjeriti pomoću raspoloživih dekantera predstavlja najveći zajednički djelitelj brojeva 360, 306 i 234. Izračunajmo $D(360, 306, 234)$ i koeficijente u Bézoutovoj lemi Blankinshipovom metodom. Početna matrica je

$$\begin{bmatrix} 360 & 1 & 0 & 0 \\ 306 & 0 & 1 & 0 \\ 234 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prvo Euklidov algoritam primjenjujemo na dva najveća broja u prvom stupcu tj. na 360 i 306. Uočimo da je $360 = 306 \cdot 1 + 54$, pa je $360 + 306 \cdot (-1) = 54$. Ako drugi redak pomnožimo s -1 i dodamo prvom, dobivamo

$$\begin{bmatrix} 54 & 1 & -1 & 0 \\ 306 & 0 & 1 & 0 \\ 234 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sad je $306 = 234 \cdot 1 + 72$ odnosno $306 + 234 \cdot (-1) = 72$ pa množenjem trećeg retka s -1 i dodavanjem drugom, imamo

$$\begin{bmatrix} 54 & 1 & -1 & 0 \\ 72 & 0 & 1 & -1 \\ 234 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz izraza $234 = 72 \cdot 3 + 18$ imamo $234 + 72 \cdot (-3) = 18$. Zato drugi redak pomnožimo s -3 i dodamo trećem pa dobivamo matricu oblika

$$\begin{bmatrix} 54 & 1 & -1 & 0 \\ 72 & 0 & 1 & -1 \\ 18 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da je $72 = 18 \cdot 4$ odnosno $72 + 18 \cdot (-4) = 0$ pa množenjem trećeg retka s -4 i dodavanjem drugom, imamo

$$\begin{bmatrix} 54 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -17 \\ 18 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Na kraju, $54 = 18 \cdot 3$ tj. $54 = 18 \cdot 3$ pa ako treći redak pomnožimo s -3 i dodamo prvom dobivamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & -17 \\ 18 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Iz zadnjeg retka iščitavamo da je $D(360, 306, 234) = 18$ i

$$18 = 0 \cdot 360 + (-3) \cdot 306 + 4 \cdot 234. \tag{2}$$

To zapravo znači da 18 ml vina možemo izmjeriti samo s dekanterima od 306 ml i 234 ml i to tako da četiri puta sipamo vino u dekanter od 234 ml, to presipamo u dekanter od 306 ml pri čemu triput prospemo vino iz dekantera od 306 ml. Lako se zaključi da 36 ml možemo izmjeriti tako da još jednom ponovimo taj postupak. Ako izraz (2) pomnožimo s 2, dobivamo

$$36 = 0 \cdot 360 + (-6) \cdot 306 + 8 \cdot 234.$$

Dakle, 36 ml vina možemo dobiti tako da osam puta sipamo vino u dekanter od 234 ml, to presipamo u dekanter od 306 ml pri čemu šest puta prospemo vino iz dekantera od 306 ml. Uočimo da opet nije potrebno koristiti dekanter od 360 ml. ◀

5 Zadaci za vježbu

Problemi presipanja mogu se javiti na županijskim i državnim natjecanjima za učenike 7. i 8. razreda. Stoga u nastavku ostavljamo čitatelju nekoliko zadataka za vježbu.

Zadatak 5.1. Mljekarica Darija ima u velikoj kanti mlijeko i manje kante od 8 i 3 litre. Kupac traži 2 litre mlijeka. Kako da izmjeri?

Zadatak 5.2. Vinogradar Goran ima u buretu vino. Kako da jednom prijatelju izmjeri 5 litara vina, ako raspolaže samo s posudama od 4 litre i 7 litara?

Literatura

[1] T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, *104 Number Theory Problems (From the Training of the USA IMO Team)*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2006.

[2] W. A. Blankinship, *A new version of the Euclidean algorithm*, Amer. Math. Monthly 70 (1963), 742–745.

[3] W. E. Clark, *Elementary Number Theory*, Skripta, Department of Mathematics, University of South Florida, 2002.

[4] G. Donald Allen, *Math in the Movies*, `http://www.math.tamu.edu/~dallen/hollywood/diehard/diehard.htm`

[5] I. Matić, *Uvod u teoriju brojeva*, Skripta, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2011.

[6] R. Séroul, *Programming for Mathematicians*, Springer, 2000.

[7] *MacTutor History of Mathematics archive,* `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bezout.html`

[8] *Problemi presipanja,* `http://www.diofant.org/FAJLOVI/INTEGRAL%20PDF/INTEGRAL%204/TEM%206.1.%20-%20PROBLEMI%20PRESIPANJA.pdf`

[9] *Eric Weisstein's World of Science,* `http://scienceworld.wolfram.com/biography/Bezout.html`

[10] `https://thenoteboo.wordpress.com/2015/12/03/blankinships-method/`