Bolyai - Gerwienov teorem*

Margita Pavleković†

Sažetak.*Bolyai-Gerwienov teorem ima veliku primjenu u nastavi geometrije u osnovnoj školi. Ovaj teorem glasi: Ako dva ravninska poligona imaju jednake površine, oni su jednakorastavljivi.*

Abstract. **The Bolyai-Gerwien's theorem.** *The Bolyai-Gerwien's theorem has a wide scope of application in teaching geometry at the elementary school. The theorem says the following: If two polygons in the plane have the same area, then one of them can be cut into pieces which can be recombined to form the other one.*

1. Uvod

Razmotrimo najprije sljedeće pojmove: poligon, površina i jednakorastavljivost.

Poligon je dio ravnine omeđen jednostavno zatvorenom izlomljenom linijom (vidi sliku).

Pojam **ploštine** (površine) možemo definirati na sljedeći način: Označimo s $\mathcal{P}$ skup svih poligona u ravnini (uključujući 0). Površina (ili ploština) p na skupu $\mathcal{P}$ je funkcija $p : \mathcal{P} \to R$ s ovim svojstvima:

*Predavanje održano u okviru Matematičkog kolokvija, HMD – Podružnica Osijek, 27. listopada 1995.

†Pedagoški fakultet, L. Jägera 9, HR-31 000 Osijek

(P_1) $p(M) \geq 0, \forall M \in \mathcal{P}$ *(aksiom pozitivnosti)*

(P_2) $p(\Pi_1 + \Pi_2) = p(\Pi_1) + p(\Pi_2), \forall \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}$ *(aksiom aditivnosti)*

(P_3) Ako je $\Pi_1 \cong \Pi_2$, onda je $p(\Pi_1) = p(\Pi_2)$ *(invarijantnost s obzirom na sukladnost - izometrije)*

(P_4) postoji barem jedan kvadrat K stranice 1 takav da je $p(K) = 1$ *(normiranost)*

Broj $p(M)$ obično zovemo ploština poligona.

Što možemo reći o funkciji $p : \mathcal{P} \to R$, za koju vrijede navedena svojstva?

Kako je $p(\mathcal{P}) = R_0^+$, funkcija p nije surjekcija. Nadalje, iz prethodne slike vidimo da za različite poligone K i Π_1 vrijedi $p(K) = p(\Pi_1)$, pa zaključujemo da p nije injekcija.

Za dva geometrijska lika kažemo da su jednakorastavljivi ako se jedan može razrezati po izlomljenim linijama na dijelove od kojih se može sastaviti drugi lik.

Sada možemo formulirati Bolyai - Gerwinov teorem:

Teorem 1. *(Bolyai-Gerwien) Ako dva ravninska* **poligona** *imaju jednake* **ploštine***, tada su oni* **jednakorastavljivi**.

2. Primjeri jednakorastavljivosti

Primjer 1. Križ A i kvadrat B su jednakorastavljivi ($A_1 \cong B_1$, $A_2 \cong$

$B_2, \quad A_3 \cong B_3, \quad A_4 \cong B_4)$.

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

Nikoja dva od likova A_1, A_2, A_3, A_4 nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka.

$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$

Nikoja dva od likova B_1, B_2, B_3, B_4 nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka.

Primjer 2. Križ A i pravokutnik C su jednakorastavljivi.

Primjer 3. Iz dva kvadrata rastavljanjem na dijelove slažemo novi kvadrat

Primjer 4. Navedimo na kraju dva poznata klasična primjera:

X. st. bagdadski matematičar
i astronom Abul-Vefa.

H. Dudeney

3. Primjena Bolyai-Gerwienovog teorema u nastavi

Navest ćemo dvije moguće primjene ovog teorema u nastavi.

a) Ako znamo površinu pravokutnika, primjenom metode razlaganja moguće je izračunati ploštinu bilo kojeg poligona. Niže navedene sličice sugeriraju neke takve mogućnosti.

paralelogram *trokut* *trapez* *deltoid*

b) Dokaz Pitagorinog teorema također se može izvesti kao posljedica Bolyai - Gerwinovog teorema:

Zabavna matematika. Za svaki pojedini slučaj razrezivanja danog poligona i izgradnje nekog drugog poligona jednake površine može se postaviti pitanje najbolje razdiobe u smislu minimalnosti dijelova, obliku dijelova i tome slično. Ovo može biti sadržaj dopunskog rada s učenicima.

Literatura

[1] H. MESCHKOWSKI, *Temelji euklidske geometrije*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

[2] Pavković-Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[3] M. Polonijo, *Bolyai-Gerwienov teorem*, Matematika 3, Zagreb, 1980.