Skiciranje grafa složene funkcije oblika $F(x) = a \cdot f(bx + c) + d$*

Luka Čeliković†

Sažetak. *U ovom izlaganju diskutiraju se načini skiciranja grafa složene funkcije* $F(x)=a \cdot f(bx+c)+d$ *na osnovi poznavanja grafa realne funkcije* f.

Abstract. **Drawing the graph of the composite functions.** *In this lecture we discuss how to draw a graph of the composite function* $F(x) = a \cdot f(bx + c) + d$ *by using the graph of function* f.

1. Uvod

Često puta potrebno je brzo skicirati graf neke funkcije, koja je kompozicija nekih jednostavnih elementarnih funkcija. Pokazat ćemo kako se to može uraditi korištenjem nekih geometrijskih transformacija ako je zadana funkcija kompozicija nekih elementarnih funkcija. Postupak će se ilustrirati na nekoliko primjera.

2. Skiciranje grafa složene funkcije

Za realnu funkciju $f : D_f \to R\,(D_f \subseteq R)$ treba skicirati graf funkcije $F : D_F \to R$ $(D_F \subseteq R)$ zadane formulom

$$F(x) = a \cdot f(bx + c) + d, \qquad a, b, c, d \in R,$$

poznavajući graf funkcije f. Vrijede sljedeća pravila:

(1) Graf funkcije $f_1 : D_{f_1} \to R$, $(D_{f_1} \subseteq R)$, $\quad f_1(x) = a \cdot f(x), \quad a \in R \setminus \{0\}$, je skup (vidi *Sliku 1.*): $\Gamma_{f_1} = \{(x, af(x)) : x \in D_{f_1}\}$.

*Predavanje održano u okviru Matematičkog kolokvija, HMD – Podružnica Osijek, 24. studenog 1995.

†Ministarstvo prosvjete i športa, Uprava za nadzor, Radna jedinica Osijek, Strossmayerova 6, HR-31 000 Osijek

Za $a > 0$ graf funkcije f_1 nastaje rastezanjem grafa funkcije f u smjeru osi y ako je $a > 1$, odnosno njegovim stezanjem ako je $0 < a < 1$.

Za $a < 0$ graf funkcije f_1 nastaje rastezanjem grafa funkcije $-f$ u smjeru osi y ako je $a < -1$, odnosno njegovim stezanjem ako je $-1 < a < 0$.

Za $a = 1$ je $f_1(x) = f(x)$, dok je $f_1(x) = -f(x)$ za $a = -1$.

Slika 1. *Slika 2.*

(2) Graf funkcije $f_2 : D_{f_2} \to R$, $(D_{f_2} \subseteq R)$, $f_2(x) = f(bx)$, $b \in R \setminus \{0\}$, je skup (vidi *Sliku 2.*): $\Gamma_{f_2} = \{(\frac{x}{b}, f(x)) : \frac{x}{b} \in D_{f_2}\}$.

Naime, $f_2(\frac{x}{b}) = f(b\,\frac{x}{b}) = f(x)$. Za $b > 0$ graf funkcije f_2 nastaje stezanjem grafa funkcije f u smjeru osi x ako je $b > 1$, odnosno njegovim rastezanjem ako je $0 < b < 1$.

Za $b < 0$ graf funkcije f_2 nastaje stezanjem grafa funkcije $f(-x)$ u smjeru osi x ako je $b < -1$, odnosno njegovim rastezanjem ako je $-1 < b < 0$.

Za $b = 1$ je $f_2(x) = f(x)$, dok je $f_2(x) = f(-x)$ za $b = -1$.

(3) Graf funkcije $f_3 : D_{f_3} \to R$, $(D_{f_3} \subseteq R)$, $f_3(x) = a\,f(bx)$, $a, b \in R \setminus \{0\}$, je skup (vidi *Sliku 3.*): $\Gamma_{f_3} = \{(\frac{x}{b}, a\,f(x)) : \frac{x}{b} \in D_{f_3}\}$.

Naime, $f_3(\frac{x}{b}) = a\,f(b\,\frac{x}{b}) = a\,f(x)$. Graf funkcije f_3 nastaje rastezanjem (za $|a| > 1$), odnosno stezanjem (za $|a| < 1$) grafa funkcije $f_2(x) = f(bx)$ ako je

$a > 0$, ili pak grafa funkcije $f_2(x) = -f(bx)$ ako je $a < 0$ na način opisan u (1).

Slika 3. *Slika 4.*

(4) Graf funkcije $f_4 : D_{f_4} \to R$, $(D_{f_4} \subseteq R)$, $f_4(x) = f(x+c)$, $c \in R$, je skup (vidi *Sliku 4.*): $\Gamma_{f_4} = \{(x-c, f(x)) : x-c \in D_{f_4}\}$.

Naime, $f_4(x-c) = f((x-c)+c) = f(x)$. Graf funkcije f_4 nastaje translacijom grafa funkcije f u smjeru osi x za $-c$.

(5) Graf funkcije $f_5 : D_{f_5} \to R$, $(D_{f_5} \subseteq R)$, $f_5(x) = f(bx+c)$, $b, c \in R$, $b \neq 0$, je skup (vidi *Sliku 5.*): $\Gamma_{f_5} = \{(\frac{x-c}{b}, f(x)) : \frac{x-c}{b} \in D_{f_5}\}$.

Naime, $f_5(\frac{x-c}{b} = f(b\,\frac{x-c}{b} + c) = f(x)$. Graf funkcije f_5 nastaje translacijom grafa funkcije $f_2(x) = f(bx)$ u smjeru osi x za $-\frac{c}{b}$.

Slika 5. *Slika 6.*

(6) Graf funkcije $f_6 : D_{f_6} \to R$, $(D_{f_6} \subseteq R)$, $f_6(x) = a\,f(bx+c)$, $a, b, c \in R$, $a, b \neq 0$, je skup (vidi *Sliku 6.*): $\Gamma_{f_6} = \{(\frac{x-c}{b}, a\,f(x)) : \frac{x-c}{b} \in D_{f_6}\}$.

Naime, $f_6(\frac{x-c}{b}) = a\,f(b\,\frac{x-c}{b} + c) = a\,f(x)$. Graf funkcije f_6 nastaje rastezanjem (za $|a| > 1$), odnosno stezanjem (za $|a| < 1$) grafa funkcije $f_5(x) = f(bx+c)$ ako je $a > 0$, ili pak grafa funkcije $f_5(x) = -f(bx+c)$ ako je $a < 0$ na način opisan u (1).

Primijetimo da graf funkcije f_6 također može nastati i translacijom grafa funkcije $f_3(x) = a\,f(bx)$ u smjeru osi x za $-\frac{c}{b}$.

(7) Graf funkcije $f_7 : D_{f_7} \to R$, $(D_{f_7} \subseteq R)$, $\quad f_7(x) = f(x) + d$, $\quad d \in R$, je skup (vidi *Sliku 7.*): $\Gamma_{f_7} = \{(x, f(x) + d) : x \in D_{f_7}\}$.

Naime, $f_7(x) = f(x)+d$. Graf funkcije f_7 nastaje translacijom grafa funkcije f u smjeru osi y za d.

Slika 7. *Slika 8.*

(8) Graf funkcije $f_8 : D_{f_8} \to R, (D_{f_8} \subseteq R)$, $f_8(x) = a\,f(bx+c)+d$, $a, b, c, d \in R$, $a, b \neq 0$, je skup (vidi *Sliku 6.*): $\Gamma_{f_8} = \{(\frac{x-c}{b}, a\,f(x) + d) : \frac{x-c}{b} \in D_{f_8}\}$.

Naime, $f_8(\frac{x-c}{b}) = a\,f(b\,\frac{x-c}{b} + c) + d = a\,f(x) + d$. Graf funkcije f_8 nastaje translacijom grafa funkcije f_6 u smjeru osi y za d, odnosno translacijom grafa funkcije $f_3(x) = a\,f(bx)$ u smjeru osi x za $-\frac{c}{b}$ i u smjeru osi y za d.

Primjer. *Na osnovi prethodno navedenih pravila skicirajmo graf funkcije* $f(x) = |x|$, *te grafove sljedećih funkcija:*

a) $f_1(x) = 3|x|$, **b)** $f_2(x) = \frac{1}{2}|x|$, **c)** $f_3(x) = \frac{3}{2}|x|$, **d)** $f_4(x) = |x+1|$,

e) $f_5(x) = \frac{1}{2}|x+1|$, **f)** $f_6(x) = \frac{3}{2}|x+1|$, **g)** $f_7(x) = |x|-1$, **h)** $f_8(x) = \frac{3}{2}|x+1|-1$,

Zadaci*:* Skicirati grafove sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 3 \cdot (\frac{1}{2}x+1)^2 - 1$ b) $f(x) = 3 \cdot \log_2(\frac{1}{2}x+1) - 1$ c) $f(x) = 3 \cdot \cos(\frac{1}{2}x+1) - 1$