Nastava geometrije u srednjoj školi*

Branko Španić†

Sažetak.*Cilj ovog predavanja je ukazati na mogućnost drugačijeg pristupa u nastavi geometrije. Postavlja se dilema-teza: treba li u gimnazijskim programima geometriju zasnivati aksiomatski do razine koju dozvoljava uzrast i raspoloživo vrijeme. Iskustvo autora govori da je takav pristup moguć i potrebit jer su rezultati i zainteresiranost učenika bitno povećani. Iznesena su i neka iskustva stečena eksperimentima s pojedinim grupama učenika u periodu od posljednjih petnaest godina.*

Abstract. **Teaching geometry in secondary schools.** *The aim of this lecture is to point out the possibility of different approach to geometry teaching. The following dilemma is discussed: should geometry in high school programs be axiomatically given (of course up to the level allowed by age and available time) or not. According to the author's experience, the axiomatic approach is possible and necessary due to the increased interest of pupils and their better results. Some examples are described which were gained by experimenting with particular groups of pupils in the last 15 years.*

1. Uvod

Drži se da je prvi put u ljudskoj civilizaciji pojam aksioma kao elementarne znanstvene istine uveo Euklid (330.– 275. prije Krista) pišući svoje "Elemente". Dvadeset stoljeća njegovo djelo predstavlja uzor i inspiraciju mnogim znanstvenicima raznih znanstvenih područja.

Peti Euklidov aksiom (aksiom paralelnosti) kroz nekoliko stoljeća bio je izazov mnogim matematičarima da ga ospore ili da dokažu da je on posljedica preostalih aksioma i postulata. Pri tome stvoreni su novi pogledi u filozofiji, logici, matematici, a posebno u fizici. Rođene su neeuklidske geometrije i novi sustav razmišljanja u znanosti.

*Predavanje održano u okviru Matematičkog kolokvija, HMD – Podružnica Osijek, 24. studenog 1995.

†I. gimnazija, Županijska 4, HR-31 000 Osijek

Nekoliko razloga u prilog modernijem pristupu nastave geometriji, osobito u gimnazijskim programima su: upoznavanje s pojmom aksioma i dedukcije u matematici, ukazivanje na snagu aksiomatskog sustava itd. U nastavi treba naglasiti da aksiomatski sustav mora biti: neproturječan (konzistentan), potpun i nezavisan.

Preko zgodnih primjera treba objasniti svaki od navedena tri logička zahtjeva, te kroz povijesne crtice i zanimljivosti podići zainteresiranost učenika.

2. Iskustva

Navest ćemo neka iskustva nastala u radu s grupama učenika građevinskih tehničara, geodeta, gimnazijalaca i nekih drugih.

Početkom osamdesetih godina u službeni program za prvi i treći razred uvodi se blagi aksiomatski pristup u odnosu na ravninu (prvi razred) i prostor (treći razred). Primijećeno je da je odnos učenika bio dosta rezerviran. Tih godina predmetni nastavnik je imao slobodu da 20% sadržaja sam unese u program. Tih dodatnih 30 sati bilo je dovoljno da se može ozbiljnije prići geometrijskim sadržajima i time osnažiti aksiomatski pristup. Odabrana su dva treća razreda, jedan građevinskih tehničara, drugi geodetskih tehničara. Po uspjehu slabiji je bio građevinski razred. U slabijem razredu odlučeno je najprije dati nekoliko zanimljivih crtica iz povijesti geometrije, razvoja geometrije, primijene u drugim znanostima, a zatim navesti sve aksiome pet grupa Hilbertove aksiomatike. Posebno je bilo ukazano na značaj V. grupe (paralelnost) i razvoj ostalih geometrija mijenjanjem tog aksioma.

Nakon navođenja aksioma prelazi se na dokaz onih teorema koji se dokazuju primjenom I. grupe (aksiomi veze u ravnini). Aksiomi rasporeda se prokomentiraju i dokažu elementima teorema vezanim uz kontinuum točaka na dužini i pravcu. Više vremena posvetilo se aksiomima sukladnosti. Ovdje se već pojavljuje desetak teorema koji su posljedice prve tri grupe aksioma. Aksiomi neprekidnosti se prokomentiraju, objasni se značaj i pokaže njihova važnost za presjek pravca i kružnice. Detaljnije se objašnjava aksiom o paralelama (Hilbertova formulacija) s osnovnim posljedicama (kutevi transverzale, zbroj kuteva u trokutu) i njegov utjecaj na razvoj neeuklidskih geometrija.

U geodetskom (jačem) razredu povijesni uvod je vrlo kratak. U jednom školskom satu podsjeti ih se na tri aksioma veze data u udžbeniku prvog razreda i navedu dva aksioma prostora iz programa trećeg razreda. Nakon toga rad se odvija uglavnom u okviru službenog programa.

U toku rada u oba razreda, postavljena su tri etapna cilja i konačni cilj. U svakoj etapi postavljena su tri teorema (zadatka), a konačni cilj u obliku dva složenija zadatka koje ćemo u ovom tekstu navesti.

I. etapa: Kružnica upisana u trokut $\triangle ABC$ dira strane AB, BC, CA u točkama L, K, M.

a) Poznavajući kuteve trokuta $\triangle LKM$, izračunaj kuteve trokuta $\triangle ABC$.

b) Može li trokut $\triangle LKM$ biti pravokutan?

II. etapa: Točke M_1, M_2, M_3 su središta pripisanih kružnica trokutu $\triangle ABC$.

a) Dokazati da je trokut $\triangle M_1M_2M_3$ oštrokutan.

b) Središte upisane kružnice trokutu $\triangle ABC$ je ortocentar trokuta $\triangle M_1M_2M_3$.

III. etapa: Dužine koje spajaju polovišta mimoilaznih bridova tetraedra su međusobno okomite. Dokazati da je u svakom vrhu tetraedra zbroj kuteva 180^o.

Za konačni cilj postavljeni su ovi problemi:

1) Trokut $\triangle ABC$ je pravokutan ($\angle C = 90^o$). Nožište visine iz vrha pravog kuta je točka D, a točke S_1 i S_2 su središta upisanih kružnica u trokute $\triangle ADC$

i $\triangle BCD$. Dokazati da je simetrala pravog kuta okomita na pravac S_1S_2.

2) U pravilnom tetraedru dokazati:

a) visine se sijeku u jednoj točki;

b) dužine određene polovištem bridova prolaze istom točkom;

c) mimoilazni bridovi su okomiti.

Prilikom priprema za pismeni ispit i izvode oglednih primjera dobije se prvi ozbiljniji dojam o usvojenim znanjima. Obvezno se daje domaća zadaća s odabranim zadacima sličnim ciljanim zadacima.

Etapni i konačni ciljevi postavljaju se u prvom satu obrade geometrijskih sadržaja s ciljem da se učenici maksimalno zainteresiraju i čim dođu do krajnjeg cilja reagiraju. Ovakvo problemsko postavljanje ciljeva na početku obrade gradiva pokazalo se vrlo efikasnim i autor ih koristi i kod obrade drugih matematičkih sadržaja.

Rezultati "malog metodičkog eksperimenta" bili su očekivani. Slabiji razred (građevinci) su prije dolazili do ciljeva s naglašenom sklonošću dedukciji. Prilikom rada na ploči veći broj učenika uključio se u raspravu o problemu ističući svoj način rješenja. Strogost u dokazivanju bila je primjetno i od ostalih učenika stalno poticana što je ponekad odlazilo i u netočnosti ali cilj je bio postignut. Učenici su s velikim zanimanjem prilazili geometrijskim sadržajima stalno tražeći nove probleme za samostalni rad. Posebno je radovalo vidjeti geometrijske probleme koje su učenici objavili u svojim školskim novinama kao nagradne probleme. U geodetskom (jačem) razredu gdje je obavljena površna priprema, rezultati su bili slabiji, nije bilo snažne zainteresiranosti niti naglašenja za samostalnim radom.

Kod pismenih ispita postavljeni su zadaci slične težine kao što su bili zadani ciljni zadaci. I rezultati pismenih ispita bili su u korist slabijeg razreda.

Ovakav eksperiment je proveden u nekoliko navrata tijekom petnaest godina s manjim promjenama u metodičkom pristupu što je zavisilo o razredu gdje se eksperiment izvodi.

Tijekom školske godine 1989/90. eksperiment je proveden s dvije grupe darovitih učenika. Ovdje je aksiomatski pristup dobio punu potvrdu svoje efikasnosti jer su konačni ciljni zadaci riješeni puno prije predviđenog vremena. Tako su postavljeni novi još složeniji zadaci.

Iskustva stečena ovim metodičkim eksperimentima predstavljaju mali prilog metodici nastave matematike i ako pomognu našim mlađim predavačima, onda ovo izlaganje ima svoj smisao.