

NUMERIČKI MODEL OSCILACIJA PODMORSKE REŠETKASTE KONSTRUKCIJE TEMELJENE NA MORSKOM DNU

izv. prof. dr. sc. Vanja Travaš,
dipl. ing. građ.
Građevinski fakultet
Sveučilišta u Rijeci
Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka
vanja.travas@gradri.uniri.hr

U svrhu provedbe dinamičke analize rešetkastih *offshore* konstrukcija temeljenih na morskom dnu (eng. compliant tower), razvijen je numerički algoritam za proračun polja pomaka konstrukcije uslijed hidrodinamičkog djelovanja mora. Stohastička narav rasprostiranja valova u moru je uvedena u analizu putem funkcije gustoće snage spektra valova. Opterećenje konstrukcije morskim valovima se potom definira koristeći Morisonov model djelovanja sile. Kinematički parametri valova su definirani linearnom teorijom. Utjecaj vjetera na raspodjelu strujanja mora u vertikalnom smjeru je uzet u obzir kroz kontekst Ekmanove spirale. Rešetkasta konstrukcija je modelirana prostornim Euler-Bernoulijevim konačnim elementima. Inicijalizacija dinamičkog proračuna započinje utvrđivanjem polja pomaka nastalog uslijed statičkog djelovanja uzgona, korisnog i stalnog tereta. Integracija jednadžbi gibanja se provodi Newmarkovom β metodom. U svrhu izrade numeričkih primjera, prikazani algoritam je implementiran u programsko okruženje MathCAD 15. Numerički primjeri uključuju analizu slobodnih i prisilnih oscilacija konstrukcije te FFT analizu zapisa pomaka težišta operative površine konstrukcije.

Ključne riječi: dinamička analiza, hidrodinamičko opterećenje mora, modalna analiza, prostorna rešetka, rezonancija, statička analiza

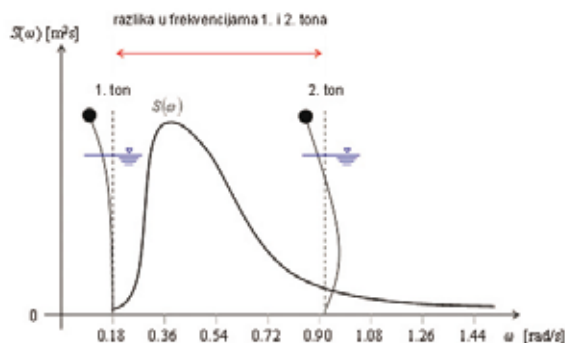
1. UVOD

Potreba za modeliranjem mehaničkog odziva rešetkastih konstrukcija temeljenih na morskom dnu proizlazi iz njihovog industrijskog i gospodarskog značaja. Ovakve konstrukcije imaju posebno važnu ulogu u procesu proizvodnje električne energije (putem instaliranih vjetroelektrana postavljenih na dio konstrukcije koji se nalazi iznad morske površine) ili pak u procesu ekstrakcije sirovina skladištenih ispod morskog dna. Iz tog razloga tema modeliranja dinamičkog odziva ovakvog tipa konstrukcije zaokuplja pažnju mnogih istraživača i inženjera.

Dimenzioniranje rešetkastih konstrukcija temeljenih na morskom dnu se zasigurno može svrstati u grupu posebno zahtjevnih inženjerskih zadataka. Temeljni

zahtjev za mehaničkom otpornošću i dinamičkom stabilnošću ovakvih konstrukcija treba zadovoljiti prikladnim izborom koncepta konstrukcije te geometrijskim i mehaničkim parametrima konstrukcijskih elemenata. Složenost zadatka slijedi iz kompleksnog hidrodinamičkog okruženja u kojem se ovakve konstrukcije nalaze. Postupak dokazivanja dinamičke stabilnosti ovakvih konstrukcija je sličan onome koji se provodi za visoke građevinske objekte temeljene na potresnom tlu (Mitrović et al., 2014.). Naime, u svrhu dokazivanja dinamičke stabilnosti visokih građevinskih objekata, potrebno je utvrditi prikladni raspored krutosti i mase konstruktivnih elemenata. Drugim riječima, osim uvjeta mehaničke otpornosti, i prvih nekoliko tonova

nosive konstrukcije (vlastitih oblika osciliranja), moraju biti na apscisi spektra ubrzanja tla izvan područja u kojem se nalazi dominantno mjerodavno spektralno ubrzanje za određeni period osciliranja. Pritom, dok se za visoke građevinske objekte frekvencije tonova najčešće pozicioniraju na apscisi s desne strane spektara ubrzanja tla, frekvencija prvog tona razmatranih konstrukcija se može pronaći s lijeve strane zadane funkcije gustoće spektra valova, i to radi značajno veće krutosti ovakvih konstrukcija naspram onih temeljenih na tlu. Lako se složiti da navedeno predstavlja stanoviti izazov u projektiranju ovakvih konstrukcija. Naime, u ovakvim okolnostima je potrebno razraditi projekt konstrukcije na način da se drugi rezonantni ton nalazi s desne strane zadanog spektra valova (frekvencije veće od vršne frekvencije valnog spektra), odnosno da se prikladnim izborom rasporeda krutosti i mase osigura dovoljan razmak između prvih dva tona, kako bi se spriječila pojava rezonancije (Adrezin et al., 1996.). Ovaj kriterij dimenzioniranja je slikovito ilustriran na slici 1.



Slika 1: Primjer relativnog odnosa funkcije gustoće snage spektra valova $S(\omega)$ i položaja na apscisi prvih dva tona rešetkaste konstrukcije temeljene na morskom dnu. Tonovi ukazuju na fleksibilni oblik osciliranja s različitim brojem nul-točaka. Tonovi su dovoljno odmaknuti izvan dominantnog prisustva spektra $S(\omega)$ te je na taj način produžen vijek trajanja konstrukcije ugrožen od utjecaja zamora materijala.

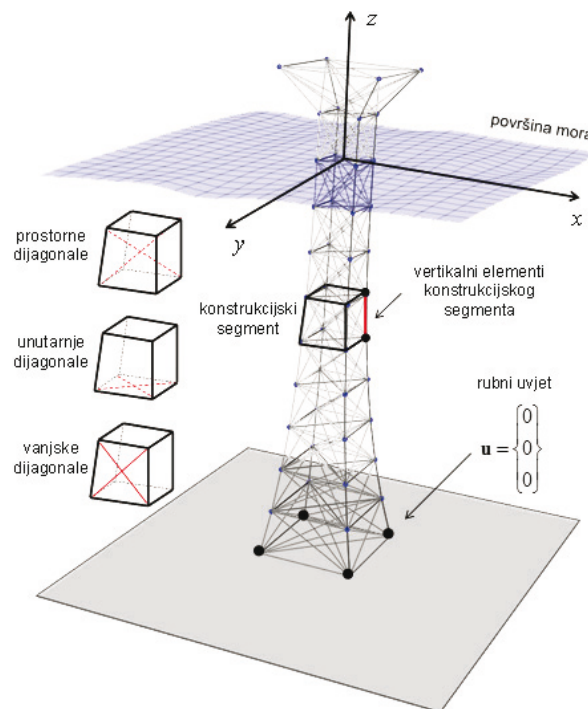
Kompleksnost u dizajniranju i dimenzioniranju ovakvih konstrukcija leži upravo u zahtjevu da se za iste osigura: (I.) dovoljno velika razlika u frekvencijama prvog i drugog tona, (II.) da se prvih dva tona konstrukcije nalaze izvan domene u kojoj se nalazi funkcija gustoće spektra valova, zadana za podneblje u kojem se nalazi konstrukcija, (III.) uvjet mehaničke otpornosti na statička djelovanja stalnog i korisnog tereta te kvazi-statička i dinamička djelovanja svih sudjelujućih opterećenja (morski valovi, morske struje, utjecaj vjetrova na dio konstrukcije iznad mora, izvanredno opterećenje, itd.).

U procesu modeliranja dinamičkog odziva ovakvih konstrukcija posebna se pažnja predaje kvantifikaciji hidrodinamičkog djelovanja morskih valova (Haritos, 2007.; Mohamad i sur., 2012.). Iako se još uvijek provode dinamičke analize, koje se temelje na modelu konstrukcije okarakteriziranom značajnom redukcijom broja stupnjeva slobode (Han i Benaroya, 2001.), u novije se vrijeme porast raspoložive proračunske snage odrazio

i na razvoj modela konstrukcije. Tako će se i u okviru ovog rada nastojati dati skromni doprinos konceptu izrade dinamičke analize ovakvih konstrukcija koristeći model konstrukcije temeljen na metodi konačnih elemenata, odnosno definiran povezivanjem prostornih Euler-Bernoullijevim konačnim elementima (EB elementi).

2. PARAMETRIZACIJA GEOMETRIJSKIH KARAKTERISTIKA KONSTRUKCIJE

Kako bi se olakšalo provođenje parametarskih analiza, putem kojih bi se definiralo optimalno konstrukcijsko rješenje, uvedena je parametrizacija geometrijskih i topoloških značajki prostorne rešetkaste konstrukcije. Izmjenom uvedenih parametara se može kombinirati zadavanje unutarnjih dijagonala u rešetkastoj konstrukciji (slika 2), te se mogu mijenjati geometrijske značajke na globalnoj razini konstrukcije (slika 3) i lokalnoj razini, odnosno na razini konstrukcijskih elemenata. Parametri koji kontroliraju globalne geometrijske značajke se odnose na progresivno povećanje promjera EB elementa rešetkaste konstrukcije D_e po dubini mora (gdje indeks e označava redni broj EB elementa), te povećanja širine rešetkaste konstrukcije, odnosno duljine EB elementa. Parametri koji kontroliraju lokalne geometrijske značajke se odnose na zadavanje debljine stijenke konstrukcijskih elemenata. Na ovaj je način postignuto relativno jednostavno kontroliranje rasporeda krutosti i mase.



Slika 2: Pravokutni segment prostorne rešetkaste konstrukcije u kojem su označene različite dijagonale, odnosno konstrukcijski elementi koji povezuju vrhove pravokutnog segmenta radi ostvarivanja dodatne torzijske i fleksijske krutosti. Ishodište referentnog koordinatnog sustava se nalazi na koti srednje razine mora iznad težišta konstrukcije. Rubni uvjeti spriječenih pomaka su definirani na čvorovima elemenata koji se nalaze na razini temeljnog tla.



Slika 3: Primjeri različitih inicijalnih geometrija prostorne rešetkaste konstrukcije dobiveni za različite vrijednosti parametra uvedenih za parametrizaciju geometrijskih karakteristika konstrukcije. Parametrima za topološku manipulaciju konstrukcije se kontrolira prisutnost dijagonalnih konstrukcijskih elemenata.

hidrodinamički neaktivnom okruženju. Na taj se način prostorna rešetkasta konstrukcija opterećuje vektorom \mathbf{f}_s koji uključuje stalni i korisni teret te uzima u obzir uzgonsku silu na uronjene konstrukcijske elemente, te eventualnu stratificiranost morske sredine, tj. vertikalni gradijent gustoće mora. Vanjske sile definirane vektorom \mathbf{f}_s se uravnotežuju s unutarnjim silama definiranim umnoškom globalne matrice krutosti \mathbf{K} i vektora polja pomaka \mathbf{u}_s (1).

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_s = \mathbf{f}_s \quad (1)$$

3. STATIČKA ANALIZA

Statička analiza konstrukcije se provodi u svrhu inicijalizacije dinamičke analize, odnosno u svrhu definiranja polja pomaka konstrukcije \mathbf{u}_s i polja unutarnjih sila na početku analize, odnosno u odsustvu dinamičkog djelovanja mora. U fizikalnom smislu ovakve okolnosti odgovaraju konstrukciji temeljenoj na morskom dnu u

U svrhu inicijalizacije dinamičke analize, odnosno određivanja vektora polja pomaka \mathbf{u}_s (1), usvaja se linearno-elastični konstitutivni model materijala konstrukcijskih elemenata te se, sukladno tome, krutost svakog elementa e kvantificira matricom krutosti $\mathbf{K}_{lok,e}$ definiranom u lokalnim koordinatama u obliku (Wilson, 1995.)

$$\mathbf{K}_{lok,e} = \begin{pmatrix} \frac{A_e E_e}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A_e E_e}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_e I_{z,e}}{L_e^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_e I_{z,e}}{L_e^2} & 0 & -\frac{12E_e I_{z,e}}{L_e^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_e I_{z,e}}{L_e^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_e I_{y,e}}{L_e^3} & 0 & -\frac{6E_e I_{y,e}}{L_e^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12E_e I_{y,e}}{L_e^3} & 0 & -\frac{6E_e I_{y,e}}{L_e^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_e I_{t,e}}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_e I_{t,e}}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E_e I_{y,e}}{L_e^2} & 0 & \frac{4E_e I_{y,e}}{L_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_e I_{y,e}}{L_e^2} & 0 & \frac{2E_e I_{y,e}}{L_e} & 0 \\ 0 & \frac{6E_e I_{z,e}}{L_e^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_e I_{z,e}}{L_e} & 0 & -\frac{6E_e I_{z,e}}{L_e^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_e I_{z,e}}{L_e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_e E_e}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12E_e I_{z,e}}{L_e^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E_e I_{z,e}}{L_e^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12E_e I_{y,e}}{L_e^3} & 0 & \frac{6E_e I_{y,e}}{L_e^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_e I_{t,e}}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_e I_{y,e}}{L_e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_e I_{z,e}}{L_e} \end{pmatrix} \quad (2)$$

symm.

gdje E_e označava Youngov modul materijala EB elementa e , G_e označava modul posmika, A_e definira površinu stijenke poprečnog presjeka, $I_{y,e}$ moment tromosti poprečnog presjeka osi y , $I_{z,e}$ moment tromosti poprečnog presjeka oko osi z te $I_{t,e}$ moment torzije

poprečnog presjeka. Obzirom da su EB elementi konstrukcije različito orijentirani u prostoru, potrebno je provesti transformaciju lokalnih stupnjeva slobode po obrascu (Sorić, 2004.)

$$\hat{\mathbf{K}}_{lok,e} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{K}_{lok,e} \mathbf{T}_e \quad (3)$$

za što se koristi transformacijska matrica \mathbf{T}_e veličine 12×12

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} \Lambda_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_e \end{pmatrix} \quad (4)$$

čije je struktura sastavljena od nul-matrice $\mathbf{0}$ veličine 3×3 i sub-matrice

$$\Lambda_e = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

koje sadrže kosinuse smjerova EB elementa određene obzirom na globalne koordinatne osi. Drugim riječima, članovi matrice l_1, m_1 i n_1 predstavljaju kosinuse smjerova određene za lokalnu os x' , EB elementa, obzirom na koordinatne osi x, y i z globalnog koordinatnog sustava (slika 2). Globalna matrica krutosti \mathbf{K} (6) slijedi iz sume svih lokalnih matrica krutosti $\hat{\mathbf{K}}_{lok,e}$ (od $e = 1$ do ukupnog broja EB elemenata n_e) napisanih u globalnim koordinatama, što se može sažeto napisati koristeći standardni operator objedinjavanja lokalnih doprinosa konačnih elemenata (6).

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_e} \hat{\mathbf{K}}_{lok} \quad (6)$$

Rubni uvjeti na kontaktne konstrukcije i temeljnog tla se za provedbu statičke i dinamičke analize zadaju u obliku idealno krute veze, odnosno na način da se sudjelujućim stupnjevima slobode spriječe svi pomaci (slika 2). Drugim riječima, iz analize se isključuju stupnjevi slobode koji u globalnim koordinatama odgovaraju pomacima čvorova u razini temeljnog tla.

4. DINAMIČKA ANALIZA

Polje pomaka konstrukcije \mathbf{u} se unutar dinamičke analize određuje u vremenskoj domeni u kojoj je zadan vektor vanjskih sila $\mathbf{f}_v(t)$ koji sadrži relevantna hidrodinamička djelovanja mora, te vektor \mathbf{f}_s koji uključuje opterećenje uzgona, korisnog i stalnog tereta. Dinamička analiza se tako svodi na određivanje polja \mathbf{u} u jednadžbi (Adrezin i sur. 1996.)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_v(t) + \mathbf{f}_s \quad (7)$$

u kojoj je \mathbf{M} globalna matrica masa, \mathbf{C} matrica Rayleighovog viskoznog prigušenja te $\ddot{\mathbf{u}}$ i $\dot{\mathbf{u}}$ predstavljaju vektore karakterističnih vremenskih derivacija vektora pomaka \mathbf{u} (Zienkiewicz i sur., 1978.). Konzistentna lokalna matrica masa $\mathbf{M}_{lok,e}$ EB elementa e , ima sljedeći raspored koeficijenata

$$\mathbf{M}_{lok,e} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M_{2,2} & 0 & 0 & 0 & M_{2,6} & 0 & M_{2,8} & 0 & 0 & 0 & M_{2,12} \\ & & M_{3,3} & 0 & M_{3,5} & 0 & 0 & 0 & M_{3,9} & 0 & M_{3,11} & 0 \\ & & & M_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{4,10} & 0 & 0 \\ & & & & M_{5,5} & 0 & 0 & 0 & M_{5,9} & 0 & M_{5,11} & 0 \\ & & & & & M_{6,6} & 0 & M_{6,8} & 0 & 0 & 0 & M_{6,12} \\ & & & & & & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & M_{8,8} & 0 & 0 & 0 & M_{8,12} \\ & & & & & & & & M_{9,9} & 0 & M_{9,11} & 0 \\ & & & & & & & & & M_{10,10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & M_{11,11} & 0 \\ & & & & & & & & & & & M_{12,12} \end{pmatrix} \quad (8)$$

(symm.)

te će se kvantifikacija ovih koeficijenata u ovom radu izostaviti radi uštede prostora, ali i iz razloga jer se vrijednosti koeficijenata mogu lako pronaći u literaturi (Bathe, 1996.). Analogno transformaciji (3), lokalne matrice masa $\mathbf{M}_{lok,e}$ je potrebno transformirati po obrascu

$$\hat{\mathbf{M}}_{lok,e} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{M}_{lok,e} \mathbf{T}_e \quad (9)$$

te se nakon toga može pristupiti formiranju globalne matrice masa \mathbf{M} koja se dobiva sumom svih lokalnih matrica masa $\hat{\mathbf{M}}_{lok,e}$ napisanim u globalnim koordinatama (10).

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{n_e} \hat{\mathbf{M}}_{lok,e} \quad (10)$$

Matrica viskoznog prigušenja \mathbf{C} je definirana na uobičajeni način, odnosno linearnom kombinacijom matrice krutosti \mathbf{K} (6) i matrice masa \mathbf{M} (10). U tu se svrhu uvode faktori skaliranja i doprinosa krutosti α_c i mase β_c (11), te se iznos ovih faktora određuje laboratorijskim putem i može se koristiti u svrhu kalibriranja numeričkog modela (ukoliko postoje prikladne informacije o provedenim mjerenjima na izvedenim objektima). Posebnu je pažnju potrebno posvetiti u svrhu primjerene kvantifikacije faktora α_c i β_c , koja se provodi tako da se unaprijed utvrde frekvencije tonova konstrukcije koje se namjeravaju prigušiti (Chandrasekaran, 2017.) uvođenjem matrice \mathbf{C} (11).

$$\mathbf{C} = \alpha_c \mathbf{K} + \beta_c \mathbf{M} \quad (11)$$

Dinamička analiza konstrukcije se temelji na numeričkoj integraciji jednadžbi gibanja (7) koja se provodi Newmarkovom β metodom (Wilson, 1995.). Vremenska domena analize se u tu svrhu diskretizirala u ekvidistantne vremenske intervale Δt_k na kraju kojih se definira vektor pomaka čvorova konstrukcije u prouzročen djelovanjem vektora vanjske sile \mathbf{f}_v proračunatog na početku istog vremenskog koraka (eksplicitni pristup). Prepoznavanje veličina u različitim vremenskim inkrementima će se u nastavku rada vršiti uvodeći brojač vremenskih koraka u obliku eksponenta k , koji se nalazi u zagradama zbog razlikovanja od matematičke operacije potenciranja te ukazuje na vremenski trenutak za koji se ta veličina odnosi. Tako će npr. pomak $\mathbf{u}^{(k+1)}$ biti prouzročen vektorom $\mathbf{f}_v^{(k)}$ i desit će se u trenutku $k \cdot \Delta t_k$.

U svrhu izrade numeričkih primjera, integracijski parametri Newmark metode β usvojeni su s vrijednostima $\beta = 0$ i $\gamma = 0.5$. Ovakav izbor integracijskih parametara je motiviran računalnom implementacijom rezultirajućeg numeričkog algoritma, odnosno činjenicom da se kod ovakvog izbora integracijskih

parametara zaobilazi potreba za inverzijom matrice krutosti (6) na početku svakog vremenskog koraka. Na taj se način smanjuje vrijeme potrebno za provedbu računalne simulacije, koje je u analizi pomorskih konstrukcija već inicijalno značajno radi relativno velikog broja računskih operacija potrebnih za proračun vektora vanjskog opterećenja \mathbf{f}_v (7).

U svrhu kompaktnijeg zapisa jednadžbi numeričkog algoritma, prikladno je definirati sljedeće konstante: $a_0 = 1 / (\beta \cdot \Delta t_k^2)$, $a_1 = \gamma / (\beta \cdot \Delta t_k)$, $a_2 = 1 / (\beta \cdot \Delta t_k)$, $a_3 = (1 / 2 \cdot \beta) - 1$, $a_4 = (\gamma / \beta) - 1$, $a_5 = (\Delta t_k / 2) \cdot (\gamma / \beta) - 2$, $a_6 = \Delta t_k \cdot (1 - \gamma)$, $a_7 = \Delta t_k \cdot \gamma$. Dinamičku analizu je potrebno inicijalizirati definirajući efektivnu matricu krutosti $\mathbf{K}_{efektivno}$ (12).

$$\mathbf{K}_{efektivno} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} \quad (12)$$

Obzirom da se koeficijenti efektivne matrice krutosti $\mathbf{K}_{efektivno}$ (12) ne mijenjaju tijekom analize, prikladno je prije pokretanja vremenske petlje proračun inicijalizirati tako da se odredi matrica $(\mathbf{K}_{efektivno})^{-1}$ te ista spremi u memoriju računala. Za definiranje polja pomaka na kraju prvog vremenskog koraka $k = 0$, potrebno je zadati početne uvjete koji se svode na zadavanje polja pomaka $\mathbf{u}^{(k=0)}$ i polja brzine čvorova konstrukcije $\dot{\mathbf{u}}^{(k=0)}$. Akceleracija čvorova $\ddot{\mathbf{u}}^{(k=0)}$ konstrukcije se tada može odrediti iz jednakosti (Wilson, 1995.)

$$\ddot{\mathbf{u}}^{(k=0)} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_s - \mathbf{K} \mathbf{u}^{(k=0)} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}^{(k=0)}) \quad (13)$$

Polje pomaka u trenutku $t = 0$ je definirano vektorom pomaka $\mathbf{u}^{(k=0)}$ dobivenog za djelovanje stalnog i korisnog tereta konstrukcije, a polje brzine $\dot{\mathbf{u}}^{(k=0)}$ se usvaja jednakim nuli. Na kraju vremenskog koraka Δt_k vektor pomaka čvorova $\mathbf{u}^{(k+1)}$ je moguće odrediti iz jednadžbe

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{K}_{efektivno}^{-1} \cdot \mathbf{f}^{(k)} \cdot \varphi^{(k)} \quad (14)$$

u kojoj je vektor $\mathbf{f}^{(k)}$ određen izrazom

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}_v^{(k)} + \mathbf{M} (a_0 \mathbf{u}^{(k-1)} + a_2 \dot{\mathbf{u}}^{(k-1)} + a_3 \ddot{\mathbf{u}}^{(k-1)}) + \mathbf{C} (a_1 \mathbf{u}^{(k-1)} + a_4 \dot{\mathbf{u}}^{(k-1)} + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^{(k-1)}) \quad (15)$$

a skalarna veličina φ se uvodi kako bi se dinamičko opterećenje mora postepeno apliciralo na konstrukciju (USFOS, 2010.). Ovaj parametar se uvodi kako bi se reducirao iznos inercijalnih sila koje bi djelovale kada bi se na konstrukciju u stanju mirovanja apliciralo puno hidrodinamičko opterećenje mora. Dakle, u određenom broju vremenskih koraka se vrijednost skalarne veličine φ postepeno i linearno povećava dok se ne dosegne vrijednost 1. Nakon što su se definirali pomaci čvorova konstrukcije na kraju tekućeg vremenskog koraka k (14), potrebno je ažurirati akceleracije čvorova konstrukcije

$$\ddot{\mathbf{u}}^{(k+1)} = a_0(\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}) - a_2\dot{\mathbf{u}}^{(k)} - a_3\ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \quad (16)$$

te brzine čvorova konstrukcije

$$\dot{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + a_6\ddot{\mathbf{u}}^{(k)} + a_7\ddot{\mathbf{u}}^{(k+1)} \quad (17)$$

Proračunski algoritam definiran jednadžbama (14), (15), (16) i (17) se progresivno ponavlja sve dok suma proteklih vremenskih koraka Δt_k ne dosegne vrijeme za koje se provodi dinamička analiza prostorne rešetkaste konstrukcije. Prikazani eksplisiti algoritam je uvjetovan kriterijem numeričke stabilnosti definiranim u obliku

$$\Delta t_k \leq \frac{L_e}{\sqrt{\frac{E_e}{\rho_e}}} \quad (18)$$

4.1. Modalna analiza

Dinamičkoj analizi rešetkaste konstrukcije prethodi modalna analiza, odnosno utvrđivanje vlastitih oblika osciliranja za odabrani raspored krutosti i mase. Ovaj dio dinamičke analize je od posebnog značaja jer se unutar istog stavljaju u relativni odnos ustanovljene frekvencije prvih nekoliko oblika osciliranja konstrukcije i zadana funkcija gustoće spektra vjetrovnih valova. Od posebne je važnosti izbjeći raspored krutosti i mase koji će prouzročiti da se unutar domene gustoće spektra vjetrovnih valova locira frekvencija osciliranja jednog ili više tonova konstrukcije. Drugim riječima, ovaj dio analize se provodi u svrhu minimiziranja vjerojatnosti pojave rezonancije konstrukcije, koja se manifestira u vidu progresivnog povećanja magnitude pomaka za slučaj konstantne magnitude i frekvencije dinamičkog djelovanja.

Utvrđivanje frekvencija vlastitih oblika konstrukcije se svodi na klasični problem određivanja svojstvenih vrijednosti (Travaš i Kožar, 2008.). Pritom je važno napomenuti da za slučaj uvođenja prigušenja konstrukcije (11) problem svojstvenih vrijednosti nije definiran pa vlastite frekvencije i oblike osciliranja nije moguće odrediti. Pritom, u svrhu dimenzioniranja građevina na dinamičku pobudu, se ovo ograničenje redovito uključuje koristeći nešto konzervativniji pristup dimenzioniranja građevine. Drugim riječima, moguće je izračunate frekvencije tonova u dotičnom iznosu uvećati ili umanjiti (ovisno s koje strane spektra pobude se nalazi), kako bi bili bliži dominantnom dijelu frekvencijskog spektra pobude. Na taj se način nesigurnost u izračunatoj frekvenciji tona konstrukcije uključuje u daljnji proračun uvodeći njenu nepovoljniju

korekciju. Dakle, pri proračunu vlastitih frekvencija osciliranja i pripadajućih oblika osciliranja, desna strana dinamičke jednadžbe (7) poprima vrijednost *nul*-vektora

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (19)$$

Usvajajući harmonijski odziv konstrukcije u obliku

$$\mathbf{u} = \mathbf{d} \sin(\omega t) \quad (20)$$

u kojem ω predstavlja kružnu frekvenciju osciliranja konstrukcije, t proteklo vrijeme, a \mathbf{d} vektor svojstvenih vrijednosti, može se definirati i vektor akceleracije konstrukcije \mathbf{a} u obliku

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{d} \cos(\omega t) \quad (21)$$

Uvrštavajući izraze (20) i (21) u jednadžbu (19), dobiva se generalizirani problem svojstvenih vrijednosti (22).

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (22)$$

Dinamičku matricu \mathbf{D} je moguće dobiti dijeljenjem jednadžbe (22) s inverznom matricom krutosti \mathbf{K}^{-1} , čime se definira jednakost

$$(-\omega^2 \underbrace{\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}}_{\mathbf{D}} + \mathbf{I})\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (23)$$

u kojoj \mathbf{I} predstavlja jediničnu matricu veličine $ndof \times ndof$, gdje $ndof$ označava ukupni broj stupnjeva slobode reduciran za broj spriječenih pomaka konstrukcije (pomaci na temelju). Jednadžba (23) se nadalje može podijeliti s $-\omega^2$ čime se definira klasičan oblik problema svojstvenih vrijednosti

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (24)$$

u kojem je $\lambda = 1 / \omega^2$. Vlastita frekvencija ω_i za pojedini oblik osciliranja proračunava se s pomoću komponenta \mathbf{d}_i normaliziranog vektora svojstvenih vrijednosti \mathbf{d} (25).

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{d}_i}} \quad (25)$$

4.2. Modeliranje morskih valova

Modeliranje dinamike morskih valova se provodi superpozicijom više faznih monokromatskih komponenti osciliranja (harmonijskih komponenti), odnosno zadajući funkciju gustoće spektra valova $S(\omega)$ koja definira distribucije valnih energija po različitim frekvencijama ω prisutnih faznih komponenti (Journee i Massie, 2001.; Goda, 1988.). Za potrebe numeričke analize provedene u okviru ovog rada se usvaja Tabainov valni spektar (Tabain, 1997.)

$$S(\omega) = 0.862 \frac{0.0135g^2}{\omega^5} \exp\left(\frac{5.186}{H_s^2 \omega^4}\right) \gamma^{p(\omega)} \quad (26)$$

u kojem je g ubrzanje sile teže, H_s značajna visina vala, a parametar γ najčešće varira u rasponu od 1 do 10 te definira širinu spektra $S(\omega)$, odnosno „oštrinu“ spektra za slučaj otvorenog mora. Kvantifikacija parametra γ zavisi o funkciji

$$p(\omega) = \exp\left(\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma(\omega)\omega_p^2}\right) \quad (27)$$

u kojoj $\sigma(\omega)$ utječe na oblik funkcije gustoće spektra valova $S(\omega)$

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 0.08 & \text{ako } \omega \leq \omega_p \\ 0.10 & \text{ako } \omega > \omega_p \end{cases} \quad (28)$$

a ω_p definira vršnu kružnu frekvenciju spektra $S(\omega)$ koja se regresijskom analizom može dovesti u vezu s značajnom visinom vala H_s putem jednakosti

$$\omega_p = 0.32 + \frac{1.8}{H_s + 0.6} \quad (29)$$

Proračun relevantnih kinematičkih veličina u prostoru zauzetom morem se provodi superponirajući fazne komponente dobivene diskretizacijom spektra $S(\omega)$ na N ekvidistantnih dijelova širine $\Delta\omega$. U svrhu matematičke reprezentacije stohastičke prirode morskih valova, za svaku faznu komponentu označenu oznakom n se prikladnom statističkom raspodjelom generira fazni odmak Θ_n i smjer napredovanja definiran kutom θ_n . Kako se amplituda pojedine faze $A(\omega_n)$ iz spektra $S(\omega)$ može definirati u obliku $\sqrt{2S(\omega_n)\Delta\omega}$ (USFOS, 2010), uzdignuće vodene površine η na koordinatni (x,y) u trenutku t slijedi iz principa superpozicije u obliku

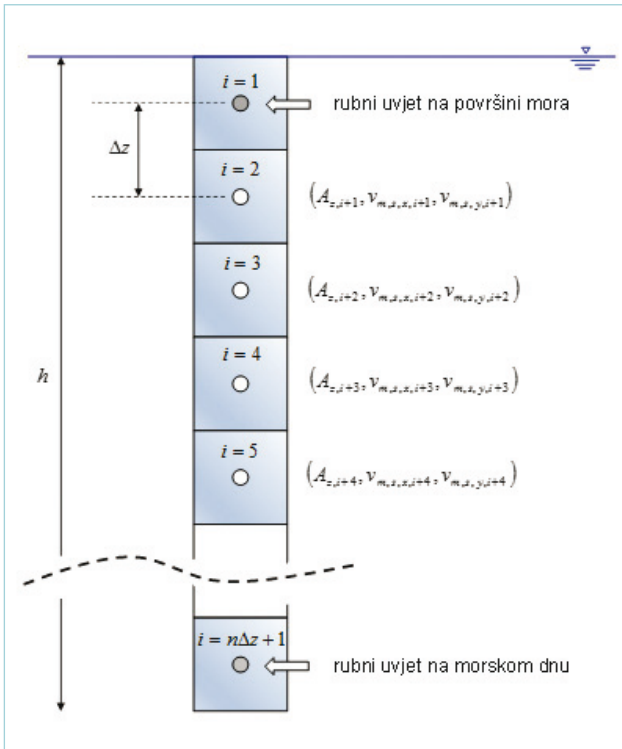
$$\eta = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sqrt{2S(\omega_n)M(\theta_n)\Delta\omega\Delta\theta} \cos(k_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) - \omega_n t + \Theta_n) \quad (30)$$

gdje je $M(\theta)$ funkcija rasipanja energije koja je definirana s M smjerova rasprostiranja valne energije, označenih indeksom m , i zadana u rasponu kuta napredovanja faznih komponenti $\Theta_{n,m}$, a k_n predstavlja valni broj fazne komponente n . Navedeno se koristi kao podloga za definiranje polja brzine i akceleracije uzrokovanim prisustvom morskih valova. Pritom, prije kvantifikacije ovih polja, potrebno je navesti da će se u nastavku rada modelirati i polje brzine koje nastaje kao rezultat prisustva morske struje, odnosno transporta vodene mase. Iz toga je razloga korisno da se unaprijed specificira nomenklatura korištena u ovom radu za razlikovanje ovih polja. Na taj će se način u nastavku rada za polje brzine uzrokovano morskim valovima koristiti oznaka $\mathbf{v}_{m,v}$ gdje indeks m označava da se radi o polju brzine u moru (za razliku od v_v što označava polje brzine vjetera), a indeks v da se radi o polju brzina koji opisuje rasprostiranje morskih valova. Komponente vektora $\mathbf{v}_{m,v}$ se definiraju tako da se trećim indeksom specificira svaka komponenta vektora ($\mathbf{v}_{m,v,x}$, $\mathbf{v}_{m,v,y}$, $\mathbf{v}_{m,v,z}$). S druge strane, polje brzine koje opisuju prisustvo morske struje će se označavati oznakom $\mathbf{v}_{m,s}$ gdje indeks m ističe da se radi o polju brzine u moru, a indeks s da se radi o polju brzine uzrokovano prisustvom morske struje. Kao i za slučaj komponenti polja brzine $\mathbf{v}_{m,v}$ komponente vektora brzine $\mathbf{v}_{m,s}$ će se označavati uvodeći treći indeks koji definira koordinatnu os za koju se komponenta vektora odnosi ($\mathbf{v}_{m,s,x}$, $\mathbf{v}_{m,s,y}$, $\mathbf{v}_{m,s,z}$). U skladu s navedenim, kvantifikacija polja $\mathbf{v}_{m,v}$ se u okviru prikazane numeričke analize provodila u skladu s linearnom teorijom morskih valova (Kim, 2008.; Mohamad et al., 2012.), te se na taj način komponente brzine mora $v_{m,v,x}(x,y,z,t)$, $v_{m,v,y}(x,y,z,t)$ i $v_{m,v,z}(x,y,z,t)$ mogu za dubinu mora h i koordinatu z , mjerenoj od srednje razine mora (slika 5), izraziti u obliku (Travaš i Krvavica, 2014.)

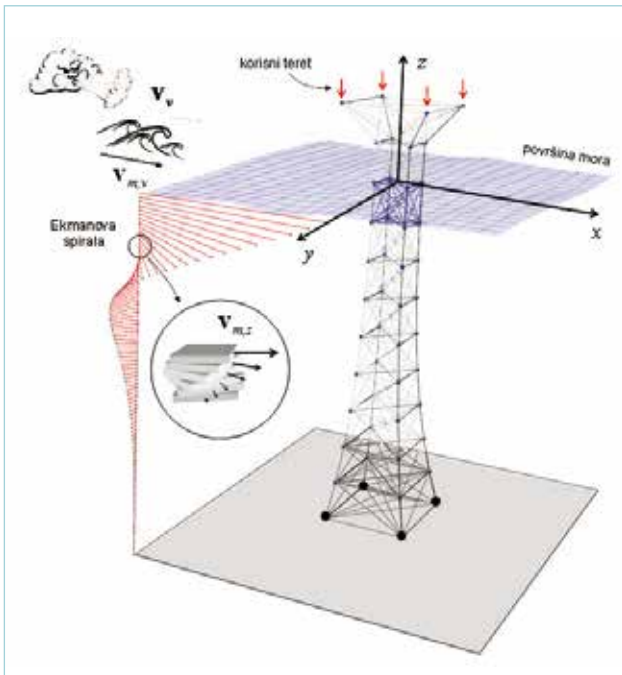
$$v_{m,v,x}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^N A_n \omega_n \frac{\cosh(k_n(h+z))}{\sinh(k_n h)} \cos(k_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) - \omega_n t + \Theta_n) \cos \theta_n \quad (31a)$$

$$v_{m,v,y}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^N A_n \omega_n \frac{\cosh(k_n(h+z))}{\sinh(k_n h)} \cos(k_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) - \omega_n t + \Theta_n) \sin \theta_n \quad (31b)$$

$$v_{m,v,z}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^N A_n \omega_n \frac{\sinh(k_n(h+z))}{\sinh(k_n h)} \sin(k_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) - \omega_n t + \Theta_n) \quad (31c)$$



Slika 4: Ekvidistantna diskretizacija vodenog stupca mora uvedena u svrhu modeliranja Ekmanove spirale, tj. polja brzine vjetrovne morske struje.



Slika 5: Shema dinamičkog djelovanja morskih valova i morskih struja te korisnog tereta apliciranog na operativnoj površini iznad razine mora. Usmjerenost faznih komponenti spektra morskih valova je varijabilna i zadaje se funkcijom $M(\theta)$.

S druge strane, radi kvantifikacije utjecaja inercijalnih sila na uronjene konstrukcijske elemente rešetkaste konstrukcije, potrebno je kvantificirati i polje ubrzanja čestica mora, definirano vektorom $\mathbf{a}_{m,v}$ s komponentama (Tadejević i Pršić, 1981.)

$$a_{m,s,x}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^N A_n \omega_n^2 \frac{\cosh(k_n(h+z))}{\sinh(k_n h)} \sin(k_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) - \omega_n t + \Theta_n) \cos \theta_n \quad (32a)$$

$$a_{m,s,y}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^N A_n \omega_n^2 \frac{\cosh(k_n(h+z))}{\sinh(k_n h)} \sin(k_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) - \omega_n t + \Theta_n) \sin \theta_n \quad (32b)$$

$$a_{m,s,z}(x,y,z,t) = -\sum_{n=1}^N A_n \omega_n^2 \frac{\sinh(k_n(h+z))}{\sinh(k_n h)} \cos(k_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) - \omega_n t + \Theta_n) \quad (32c)$$

4.3. Modeliranje morskih struja

Osim vjetrovnih kratkoperiodičkih morskih valova, putem kojih se u moru rasprostire dio energije vjetra (a putem djelovanja morskih valova se predaje dio energije i na samu rešetkastu konstrukciju), u svrhu provedbe numeričke analize je potrebno uvažiti i energiju vjetra koja se dijelom prenosi na induciranje transporta vodene mase u vidu formiranja vjetrovne morske struje u površinskom sloju mora. Naime, osim tlačne komponente naprezanja na površini mora, koja nastaje djelovanjem vjetra i koja većim dijelom uzrokuje formiranje vjetrovnih morskih valova, posmična komponenta naprezanja nastaje kao rezultat sile trenja koja može uzrokovati usmjereno kretanje mora. Naime, kao posljedica uravnoteženja Coriolisove sile i sile trenja na površini mora, generira se izmjenjiv profil brzine unutar kojeg se vektori brzine razlikuju po dubini mora, i to u magnitudi i smjeru. Ovakav profil brzina definira Ekmanovu spiralu (Jenkins i Bye, 2006.).

Modeliranje Ekmanove spirale počiva na pretpostavci da su varijable toka homogeno raspoređene u svakoj horizontalnoj ravnini koja je ujedno i okomita na vektor ubrzanja sile teže $\mathbf{g} = \{-9.81 \ 0 \ 0\}^T$. Na ovakvim ravninama leže vektori brzine toka definirani s dvije komponente $v_{m,s,x}$ i $v_{m,s,y}$, gdje se drugi indeks uvodi kako bi se označilo da se radi o polju brzina asociiranog na morske struje, a treći indeks označava komponentu brzine toka obzirom na usvojene koordinatne osi x i y (slika 2). Uvedene pretpostavke isključuju iz analize vertikalnu komponentu brzine $v_{m,s,z}$ čime se polje brzine definira s dvije parcijalne diferencijalne jednadžbe. Uz pretpostavku da gustoća mora ρ_m nije funkcija koordinata, Navier-Stokesove jednadžbe se za razmatrane uvjete toka mogu svesti na oblik (Ekman, 1905.)

$$\frac{\partial v_{m,s,x}}{\partial t} - f v_{m,s,y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z(z) \frac{\partial v_{m,s,x}}{\partial z} \right) \quad (33a)$$

$$\frac{\partial v_{m,s,y}}{\partial t} + f v_{m,s,x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z(z) \frac{\partial v_{m,s,y}}{\partial z} \right) \quad (33b)$$

u kojem f označava Coriolisov parametar definiran u obliku $f = 2\Omega \cdot \sin(\varphi)$, gdje je Ω kružna frekvencija Zemlje u iznosu od $7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, φ geografska širina zadana u radijanima za područje za koje se provodi analiza, a $A_z(z)$ funkcija koja raspoređuje koeficijent turbulentne difuzije $[L^2/T]$ po dubini mora. Djelovanje vjetera na površinu mora se očituje u sili trenja koja uzrokuje promjenu količine gibanja čestica mora i ispod same površine. U tu se svrhu sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (33) rješava za rubni uvjet zadanog posmičnog naprezanja $\tau(t)$ na kontaktu mora i zraka

$$\left(A_z(z) \frac{\partial v_{m,s,x}}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\tau_{xz}(t)}{\rho_m} \quad (34a)$$

$$\left(A_z(z) \frac{\partial v_{m,s,y}}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\tau_{yz}(t)}{\rho_m} \quad (34b)$$

te se na drugom kraju domene zadaje rubni uvjet $(v_{m,s,x}, v_{m,s,y}) \rightarrow 0$ kada $z \rightarrow -\infty$. Komponente tenzora posmičnog naprezanja $\tau(t)$ se mogu dovesti u vezu s komponentama $v_{z,x}$ i $v_{z,y}$ vektora brzine strujanja vjetera \mathbf{v}_v i to uvodeći konstitutivne jednadžbe

$$\tau_{xz}(t) = \rho_z C_\tau v_{v,x} \sqrt{v_{v,x}^2 + v_{v,y}^2} \quad ; \quad \tau_{yz}(t) = \rho_z C_\tau v_{v,y} \sqrt{v_{v,x}^2 + v_{v,y}^2} \quad (35)$$

u kojima je ρ_z gustoća zraka na koti dodira površine mora i zraka, C_τ je bezdimenzijski faktor koji najčešće poprima vrijednost u rasponu od $1.5 \cdot 10^{-3}$ do $2.6 \cdot 10^{-3}$ vrijednosti, te $v_{v,x}$ i $v_{v,y}$ komponente vektora brzine vjetera $\mathbf{v}_v = \{ v_{v,x}, v_{v,y}, v_{v,z} \}^T$ najčešće mjerene na visini od 10 m iznad površine mora. Rješenje sustava (33) definira Ekmanovu spiralu, odnosno vertikalni profil brzine koji nastaje kao rezultat dinamičkog uravnoteženja lokalne Coriolisove sile i sile trenja na površini mora. Kako za stratificiranu morsku sredinu nisu poznata zatvorena rješenja, integracija sustava (33) se za zadanu funkciju $A_z(z)$ u ovom radu provodi metodom konačnih razlika. U tu se svrhu koristi ekvidistantna prostorna diskretizacija stupca mora (od površine pa sve do dna) s prostornim inkrementom Δz . Slika 4 prikazuje obrazac diskretizacijske podjele s pripadajućim oznakama. Lijevi dio jednadžbi (33), koji pripada Coriolisovoj sili, se može diskretizirati koristeći *polu-implicitnu* metodu konačnih razlika (eng. semi-implicit method) te se time formira sustav algebarskih jednadžbi u obliku

$$v_{m,s,x,i}^{(k+1)} = v_{m,s,x,i}^{(k)} + \frac{1}{2} \Delta t_s \cdot f \left(v_{m,s,y,i}^{(k)} + v_{m,s,y,i}^{(k+1)} \right) + \Delta t_s \cdot D_{x,i} \quad (36a)$$

$$v_{m,s,y,i}^{(k+1)} = v_{m,s,y,i}^{(k)} - \frac{1}{2} \Delta t_s \cdot f \left(v_{m,s,x,i}^{(k)} + v_{m,s,x,i}^{(k+1)} \right) + \Delta t_s \cdot D_{y,i} \quad (36b)$$

u kojem kao i ranije eksponent u zagradi (k) označava vremenski korak u kojem je komponenta brzine mora definirana, indeks i označava numeraciju ćelije kojoj fizikalna veličina pripada (odnosno dubinu mora $i \cdot \Delta z$ za koju se ta fizikalna veličina odnosi), Δt_s označava usvojeni vremenski korak (koji treba razlikovati od vremenskog koraka Δt_k koji se koristi u algoritmu za proračun polja pomaka konstrukcije), a članovi $D_{x,i}$ i $D_{y,i}$ interpretiraju desnu stranu jednadžbi (33) s kojima je uveden doprinos turbulentne difuzije i koja se zasebno diskretizira u nastavku (38). Kombinirajući ove jednadžbe moguće je eksplicitno izraziti komponente horizontalne brzine toka $v_{m,s,x,i}^{(k+1)}$ i $v_{m,s,y,i}^{(k+1)}$ u vremenskom koraku ($k+1$) u prostornoj koordinati i u obliku

$$v_{m,s,x,i}^{(k+1)} = \frac{\left(1 - \frac{(\Delta t_s \cdot f)^2}{4} \right) v_{m,s,x,i}^{(k)} + \Delta t_s \cdot f \cdot v_{m,s,y,i}^{(k)} + \frac{1}{2} \Delta t_s \cdot f \cdot D_{y,i} + D_{x,i}}{1 + \frac{(\Delta t_s \cdot f)^2}{4}} \quad (37a)$$

$$v_{m,s,y,i}^{(k+1)} = \frac{\left(1 - \frac{(\Delta t_s \cdot f)^2}{4} \right) v_{m,s,y,i}^{(k)} - \Delta t_s \cdot f \cdot v_{m,s,x,i}^{(k)} - \frac{1}{2} \Delta t_s \cdot f \cdot D_{x,i} + D_{y,i}}{1 + \frac{(\Delta t_s \cdot f)^2}{4}} \quad (37b)$$

Drugu derivaciju desne strane jednadžbi (33), tj. doprinose članova turbulentne difuzije $D_{x,i}$ i $D_{y,i}$ je moguće aproksimirati na sljedeći način

$$D_{x,i} = \frac{\frac{1}{2} (A_{z,i-1} + A_{z,i}) (v_{m,s,x,i-1}^{(k)} - v_{m,s,x,i}^{(k)})}{\Delta z} - \frac{\frac{1}{2} (A_{z,i} + A_{z,i+1}) (v_{m,s,x,i}^{(k)} - v_{m,s,x,i+1}^{(k)})}{\Delta z}}{\Delta z} \quad (38a)$$

$$D_{y,i} = \frac{\frac{1}{2} (A_{z,i-1} + A_{z,i}) (v_{m,s,y,i-1}^{(k)} - v_{m,s,y,i}^{(k)})}{\Delta z} - \frac{\frac{1}{2} (A_{z,i} + A_{z,i+1}) (v_{m,s,y,i}^{(k)} - v_{m,s,y,i+1}^{(k)})}{\Delta z}}{\Delta z} \quad (38b)$$

U posljednja dva izraza (38) se uvažila prisutnost gradijenta u polju koeficijenta turbulentne difuzije $A(z)$ te se iz tog razloga za diskretizacijsku ćeliju i vrijednost ove funkcije definira kao srednja vrijednost koeficijenta turbulentne difuzije izračunata za ćeliju i i pripadajuće susjedne ćelije $i+1$ ili $i-1$. Uvrštavajući jednadžbe (38) u jednadžbe (37), generira se eksplicitni numerički algoritam za određivanje polja brzine $\mathbf{v}_{m^t s}$. Važno je i napomenuti da je navedeni numerički algoritam uvjetno stabilan i da se kao kriterij stabilnosti koristi nejednadžba

$$\Delta t_s \leq \frac{\Delta z^2}{\max(A_{z,i})} \quad (39)$$

u kojoj je $\max(A_{z,i})$ maksimalna vrijednost koeficijenta turbulentne difuzije A_z koja se pojavljuje u prostornoj i vremenskoj domeni računalne simulacije. Iako je ovim numeričkim algoritmom moguće reproducirati dinamiku razvoja Ekmanove spirale, koja nastaje kao posljedica izmjene smjera vjetera, vertikalni se raspored komponenti brzine $v_{m's'x'n}$ (37 a) i $v_{m's'y'i}$ (37 b) u dinamičkoj analizi konstrukcije usvaja konstantnim i jednakim onim koji se za neki konstantni smjer vjetera u dovoljno dugom vremenskom periodu uravnotežuje s lokalnom Coriolisovom silom.

4.4. Ukupno hidrodinamičko opterećenje

U svrhu definiranja ukupnog hidrodinamičkog opterećenja koje djeluje na EB elemente rešetkaste konstrukcije (Journee i Massie, 2001.; Haritos, 2007.; Holthuijsen, 2007.), potrebno je definirati polje vektora brzine \mathbf{v} i polje vektora ubrzanja čestica mora \mathbf{a} . Polje vektora brzine je definirano superpozicijom polja $\mathbf{v}_{m'v}$ i polja $\mathbf{v}_{m's}$ (40).

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{m,v} + \mathbf{v}_{m,s} \quad (40)$$

S druge strane, polje vektora ubrzanja mora \mathbf{a}_m je jednako polju ubrzanja definiranog jednadžbama orbitalnog gibanja čestica mora (31), i to iz razloga jer se za slučaj morskih struja razmatraju stacionarni uvjeti toka. Osim navedenoga, posebno je važno napomenuti da je utjecaj viskoznih sila opravdano zanemariti, te da tako na konstrukcijske elemente djeluju samo sile okomite na površinu istih. Obzirom da su vektori brzine \mathbf{v} (40) koaksijalni s pripadajućim vektorima hidrodinamičke sile \mathbf{f} , koja djeluje na pojedini konstrukcijski element, prije kvantifikacije dinamičkog djelovanja (putem nekog usvojenog modela sile), potrebno je odrediti ortogonalnu komponentu \mathbf{v}_n vektora \mathbf{v} i ortogonalnu komponentu \mathbf{a}_n vektora ubrzanja čestica mora \mathbf{a} u blizini svakog pojedinog konstrukcijskog elementa, odnosno po dužini istog. Kako je rešetkasta konstrukcija sastavljena od EB elemenata koji zauzimaju različitu prostornu orijentaciju u moru (slika 5), potrebno je definirati geometrijsku transformaciju vektora brzine \mathbf{v} i vektora akceleracije \mathbf{a} koja će definirati njihove ortogonalne projekcije na površinu EB elemenata konstrukcije. U tu se svrhu uvodi transformacijska operacija

$$\vec{\bullet}_n = \begin{pmatrix} 1 - C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ C_x C_y & 1 - C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & 1 - C_z^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bullet_x \\ \bullet_y \\ \bullet_z \end{Bmatrix} \quad (41)$$

koja za vektor \mathbf{s} komponentama $\{\bullet_x \bullet_y \bullet_z\}^T$ definira vektor \bullet_n okomit na konstrukcijski element tj. EB element rešetkaste konstrukcije. Članovi transformacijske matrice (41) C_x , C_y i C_z predstavljaju kosinuse smjerova EB elemenata konstrukcije (Zienkiewicz et al., 1978.). Važno je napomenuti da je za svaki EB element e ove članove potrebno ažurirati na kraju svakog vremenskog koraka dinamičke analize. Isto tako, potrebno je skrenuti pozornost na to da će izmjena razine mora, koja nastaje kao posljedica prisustva morskih valova, prouzročiti da će pojedini EB elementi rešetkaste konstrukcije s vremenom izranjati iz mora (i obrnuto) i time neće biti podložni hidrodinamičkom djelovanju mora. U tu je svrhu, potrebno razviti računarski algoritam koji će pratiti uronjenost konstrukcijskih elemenata i za svaki element definirati ukupno hidrodinamičko opterećenje.

Kvantifikacija hidrodinamičke sile se provodi putem odabira prikladnog empirijskog ili polu-empirijskog modela sile. U tu je svrhu prikladno spomenuti da se razmatranja u ovom radu ograničavaju na kvantifikaciju hidrodinamičkog djelovanja mora na cilindrične konstrukcijske elemente koji svojom geometrijom zadovoljavaju uvjet hidrauličke transparentnosti. Drugim riječima, EB elementi uronjene rešetkaste konstrukcije svojim promjerom D_e minimiziraju učinak mehaničke interakcije s morem te zadovoljavaju uvjet da je omjer promjera EB elementa D_e i valne duljine morskih valova λ_v manji od 0,05. U slučaju da ovakve okolnosti nisu ostvarene, potrebno je uračunati i doprinos sile nastao difrakcijom valova. Uz pretpostavku da se EB elementi uronjene rešetkaste konstrukcije mogu kategorizirati kao *hidraulički transparentni objekti*, kvantifikacija hidrodinamičkog djelovanja mora se za segment ds_e EB elementa e nadalje provodi Morisonovim modelom sile (Morison i sur., 1950.)

$$d\mathbf{f}^{(s)} = \left(\rho_m \frac{D_e^2 \pi}{4} \mathbf{a}^{(s)} + \rho_m C_{M,e}^{(s)} \frac{D_e^2 \pi}{4} (\mathbf{a}^{(s)} - \ddot{\mathbf{u}}^{(s)}) + \rho_m \frac{D_e}{2} C_{D,e}^{(s)} (v^{(s)} - \dot{\mathbf{u}}^{(s)}) \left| v^{(s)} - \dot{\mathbf{u}}^{(s)} \right| \right) ds_e \quad (42)$$

u kojem je $C_{M,e}$ faktor inercije i $C_{D,e}$ faktor otpora oblika EB elementa e. Usvojeni model sile uključuje utjecaj relativnog gibanja konstrukcije, što je vidljivo iz prisutnih razlika relevantnih kinematičkih veličina između mora i konstrukcije. Faktori $C_{D,e}$ i $C_{M,e}$ se definiraju u skladu s preporukama iz literature (Burcharth i Hughes, 2003.). Dakle, za svaki uronjeni EB element e će se iznos faktora $C_{D,e}$ i $C_{M,e}$ zasebno proračunati i to na početku svakog vremenskog koraka. Na taj će se način uvažiti utjecaj izmjene polja brzine na iznos faktora $C_{D,e}$ i $C_{M,e}$. Naime, iznos ovih faktora zavisi o Reynoldsovom broju Re_e definiran omjerom $|v| \cdot D_e / \nu$, u kojem ν predstavlja kinematičku viskoznost mora. Iz tog razloga, na početku svakog vremenskog koraka se za svaki EB element e definira magnituda

brzine mora $|v|$ u njegovoj blizini. Nakon toga se uz poznavanje promjera EB elementa D_e može definirati iznos faktora $C_{D,e}$ u skladu s uvjetima

$$C_{D,e}^{(k)} = \begin{cases} 1.2 - \frac{Re_e^{(k)} - 2 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^5} & \text{ako } 2 \cdot 10^5 < Re_e^{(k)} < 5 \cdot 10^5 \\ 0.7 & \text{ako } Re_e^{(k)} \geq 5 \cdot 10^5 \end{cases} \quad (43)$$

te vrijednost faktora $C_{M,e}$ u skladu s uvjetima

$$C_{M,e}^{(k)} = \begin{cases} 2.5 - \frac{Re_e^{(k)}}{5 \cdot 10^5} & \text{ako } 2.5 \cdot 10^5 < Re_e^{(k)} < 5 \cdot 10^5 \\ 1.5 & \text{ako } Re_e^{(k)} \geq 5 \cdot 10^5 \end{cases} \quad (44)$$

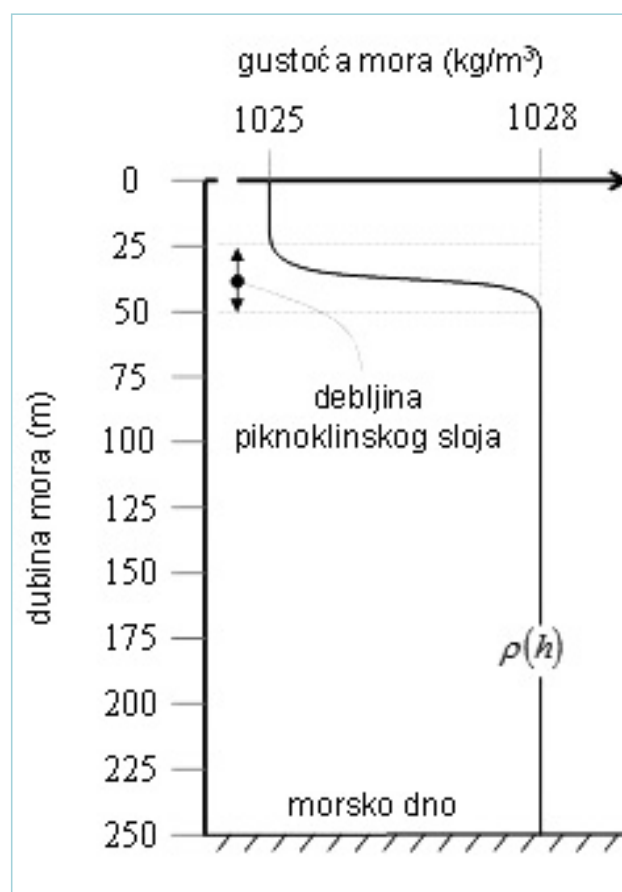
Vektor sile f_e koji djeluje na EB element e slijedi iz integracije svih doprinosa df_e (42) izračunatih po dužini L_e . Obzirom da se kinematičke veličine čestica mora po dužini svakog EB elementa mijenjaju, potrebno je provesti integraciju elementarnih doprinosa hidrodinamičkih djelovanja. U tu su se svrhu EB elementi diskretizirali na 4 ekvidistantna segmenta, te se za svaki od njih definiraju kinematičke veličine mora proračunate na polovici segmenta. Broj podjela EB elemenata je moguće i povećati, čime se pospješuje točnost modela, ali se tim istovremeno značajno povećava broj algebarskih operacija potrebnih za definiranje kinematičkih veličina čestica mora, i posljedično se značajno povećava vrijeme provedbe računalnih simulacija. Iz tog razloga je potrebno donijeti kompromisno rješenje dobiveno razmatrajući vrijeme trajanja proračuna i točnosti istog. Za provedbu numeričkih primjera prikazanih u ovom radu se usvojila diskretizacija na 4 segmenta i to iz razloga jer daljnji porast u broju segmenta nije značajno utjecao na dobivene rezultate. Iznosi hidrodinamičkih djelovanja na segmente EB elemenata rešetkaste konstrukcije se sumiraju te se za svaki EB element e formira lokalni vektor vanjskog opterećenja $f_{lok,e}$ koji uključuje nesimetrični raspored hidrodinamičkog opterećenja. Vektor vanjskog opterećenja f_v se potom definira sumom svih vektora $f_{lok,e}$ napisanih u globalnim koordinatama.

$$\mathbf{f}_v^{(k)} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_{lok,e}^{(k)} \quad (45)$$

U svrhu provedbe dinamičke analize rešetkaste konstrukcije, na vektor f_v moraju se pridodati doprinosi vlastitog i korisnog tereta definirani vektorom f_s (1). Pritom, unutar vektora f_v (45) je moguće uključiti i druga djelovanja kao što su utjecaj vjetera na dio konstrukcije iznad površine mora ili pak utjecaj termičkog gradijenta u vidu definiranja konzistentnog vektora termičkog opterećenja.

5. NUMERIČKI PRIMJER

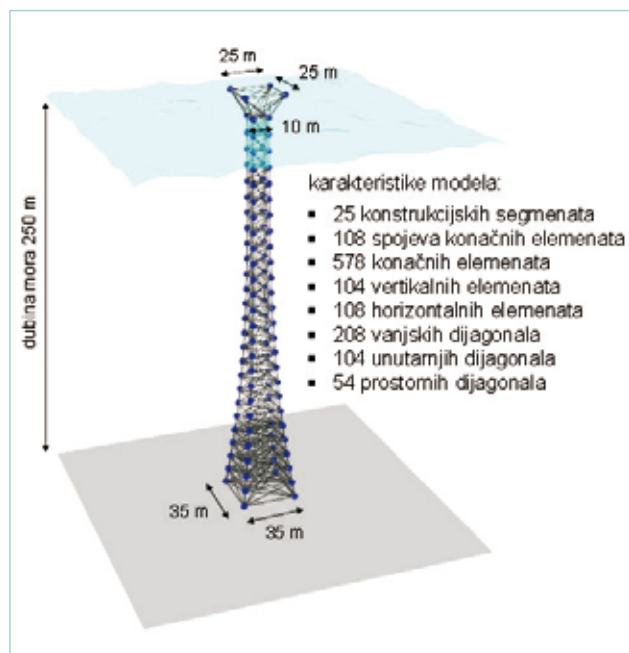
Prikazani proračunski postupak je u svrhu izrade numeričkih primjera implementiran u računarski algoritam unutar programske platforme MathCAD 15 (Mathsoft, 1993). U nastavku rada se prikazuju rezultati numeričke analize provedene za model rešetkaste konstrukcije prikazan na slici 6. Izbor geometrijskih karakteristika konstrukcije, koji je prvenstveno uvjetovan visinom čitave konstrukcije, bio je motiviran karakteristikama mora u domaćem podneblju te se tako razmatra rešetkasta konstrukcija temeljena na dubini od 250 m, što odgovara srednjoj dubini Jadranskog mora. S druge strane, izbor mehaničkih parametara konstrukcije bio je usmjeren sličnim primjerima iz literature (Adrezin i sur., 1996.; Clauss i Lee, 2003.; Mohamad i sur., 2012.). Model uključuje stratifikaciju mora koja je uvažena prilikom kvantifikacije sile uzgona. Za potrebe izrade numeričkog primjera, izmjena gustoće mora s dubinom je definirana dijagramom karakteristične vertikalne distribucije gustoće, prikazanim na slici 6, gdje je vidljiva debljina piknoklinskog sloja u iznosu od 25 m.



Slika 6: Usvojena vertikalna distribucija gustoće mora za izradu prikazanog numeričkog primjera.

Rešetkasta konstrukcija je simetrična obzirom na ortogonalne vertikalne ravnine simetrije. Na razine temelja je širina prizmatičnog konstrukcijskog segmenta

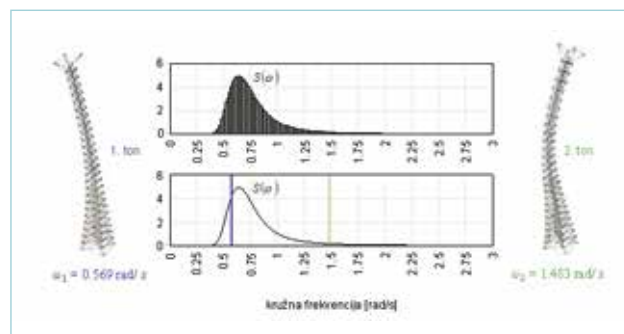
jednaka 35 m, a na razini površine mora 10 m. Redukcija širine rešetkaste konstrukcije je zadana nelinearno, i to pomoću uvedene geometrijske parametrizacije. Iznad razine mora se nalazi operativna površina konstrukcije veličine 25 × 25 m na kojoj je smješten koristan teret od 50 tona jednoliko raspoređen po EB elementima koji nose ovaj dio uronjene konstrukcije. Geometrija kružnih poprečnih presjeka konstrukcijskih elemenata se također mijenja i to tako da se krutost istih povećava s dubinom mora (promjer elemenata i debljina stijenki). Pritom, posebno se zadaju geometrijske karakteristike prostornih dijagonala, unutarnjih dijagonala, vanjskih dijagonala, vertikalnih i horizontalnih elemenata unutar svakog konstrukcijskog segmenta definiranog prizmom koja nastaje spajanjem navedenih konstrukcijskih komponenti (slika 7). Youngov modul elastičnosti E konstrukcijskih elemenata je usvojen jednakim 210 GPa, modul posmika G jednakim 80 GPa, a gustoća materijala konstrukcije iznosi 7850 kg/m³. Koeficijenti prigušenja su usvojeni u iznosu $\alpha_c = 0.5$ i $\beta_c = 0.2$.



Slika 7: Geometrija modela prostorne rešetkaste konstrukcije korištena za izradu numeričkog primjera. Na slici su označeni sastavni dijelovi konstrukcijskog segmenta te osnovne dimenzije konstrukcije.

Hidrodinamičko djelovanje vjetrovnih morskih struja je uvaženo prisustvom Ekmanove spirale dobivene za slučaj stacionarnog strujanja vjetra koji djeluje konstantnom snagom od 5 m/s u pravcu koordinatne osi x (slika 5). Hidrodinamičko djelovanje morskih valova je zadano Tabainovim valnim spektrom dobivenim za značajnu visinu vala H_s jednaku 5 m. Vršni period vala T_p je definiran u granicama $(11H_s)^{0.5} < T_p < (24H_s)^{0.5}$ kako se obično usvaja za Jadransko more. Treba primijetiti da je usvojena brzina vjetra proizvoljna i nije konzistentna s definiranim valnim visinom. Pritom,

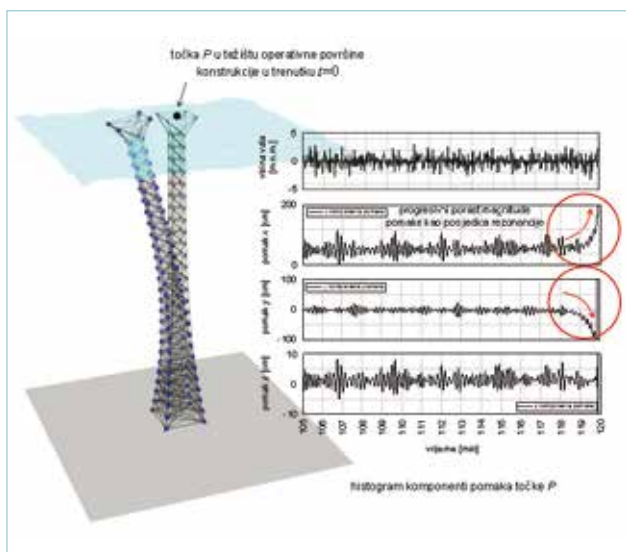
usvojena kombinacija parametara može postajati u vremenu relativno nagle redukcije brzine vjetra, dok se valovi na morskoj površini gibaju pod utjecajem inercijalnih sila u skladu s ranijom brzinom vjetra (koja je mogla biti i 15 m/s). Funkcija gustoće spektra valova $S(\omega)$ je u kontinuiranom obliku prikazana na slici 8, na kojoj se isto tako može vidjeti i njena diskretna aproksimacija dobivena s 200 ekvidistantnih frekvencijskih intervala $\Delta\omega$ u dominantnom dijelu spektra. Diskretna aproksimacija spektra je korištena u svrhu kvantifikacije kinematičkih polja definiranih jed. (31) i (32). Na istoj slici je prikazan i položaj prva dva tona osciliranja konstrukcije unutar frekventne domene spektra $S(\omega)$ te su prikazani i pripadajući oblici osciliranja. Dakle, modalnom analizom je utvrđeno da izbor geometrijskih i mehaničkih značajki rešetkaste konstrukcije definira prvi ton osciliranja s frekvencijom od 0.569 rad/s (fleksijski oblik osciliranja) i drugi ton osciliranja s frekvencijom 1.483 rad/s (fleksijski oblik osciliranja). Rezultirajući periodi osciliranja su 11.042 s za prvi ton i 4.236 s za drugi ton. Prikladno je spomenuti da se uvedena parametrizacija koristila kako bi se osiguralo da prvi torzijski oblik osciliranja poprimi frekvenciju koja se nalazi izvan dominantnog prisustva spektra $S(\omega)$, i to iz razloga jer ovaj oblik oscilacije može lako uzrokovati oštećenja konstrukcije.



Slika 8: Aproksimacija funkcije gustoće spektra valova $S(\omega)$ te položaj frekvencija prva dva tona konstrukcije u frekvencijskoj domeni spektra. Na slici su prikazani i pripadajući oblici osciliranja konstrukcije.

Za gore navedene parametre modela je provedena numerička simulacija dinamičkog odziva uronjene rešetkaste konstrukcije. U tu svrhu treba napomenuti da je usvojeni vremenski korak Δt_k bio jednak 0.1 s te da se dinamička analiza provela s 72000 vremenskih koraka, čime se rekonstruirao dinamički odziv konstrukcije u vremenskom razdoblju od 120 minuta. Veličina vremenske domene je odabrana tako da se uvaži utjecaj svih faznih komponenti usvojenog spektra morskih valova. Slika 9 prikazuje karikirane pomake konstrukcije (pomaci uvećani 100 puta) i konstrukciju u referentnom položaju tj. u vremenu $t=0$ kada je deformacija konstrukcije definirana vektorom $u_s(1)$. Na istoj je slici moguće vidjeti i zadnjih 15 minuta histograma komponenti pomaka točke P

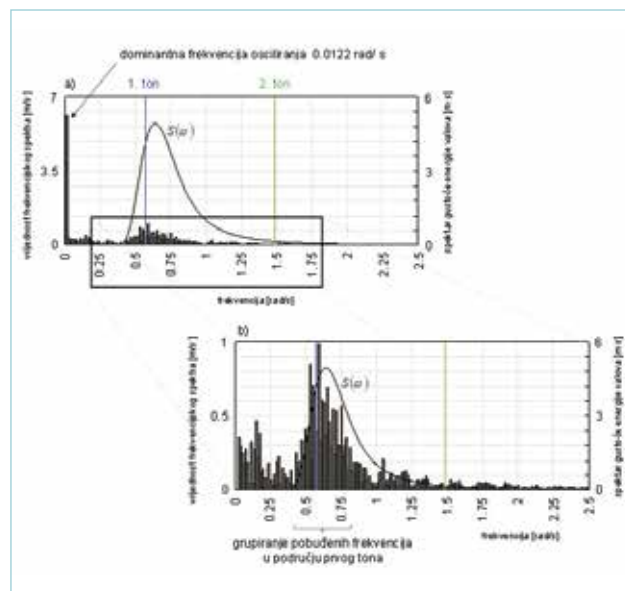
koja se nalazi iznad razine mora u težištu operativne površine konstrukcije (slika 9). Histogram pomaka komponente x ima najveću magnitudu upravo iz razloga što se u tom pravcu dominantno rasprostiru faze komponente spektra morskih valova (slika 5). Na slici 9 je i vidljiva vremenska izmjena razine vode u težištu dijela konstrukcije koji se nalazi pri samoj površini mora. Naime, treba primijetiti da se izmjena razine mora u ovakvim okolnostima događa na različite načine na različitim dijelovima konstrukcije te se upravo iz tog razloga, tj. radi nesimetričnih djelovanja mogu popuniti i torzijski modovi konstrukcije koji se nastoje izbjeći. Iz tog razloga je teško dovesti u vezu histogram težišta konstrukcije i histogram razine mora na istom mjestu. Lako je i prepoznati progresivni porast pomaka na kraju vremenske domene histograma. Naime, u nastavku analize se pomaci konstrukcije nekontrolirano povećavaju te dovode do ne-fizikalnih rezultata dinamičke analize, što istovremeno uzrokuje sam prekid proračuna. Ovaj scenarij je karakterističan za slučaj pojavljivanja rezonancije, što je za prikazani primjer bilo i očekivano, obzirom da su parametri modela (slika 8) zadani suprotno preporukama (slika 1). Obzirom da se na otvorenom moru može pojaviti širok raspon značajnih valnih visina (od 1 pa do 7 m), što će utjecati i na oblik usvojenog valnog spektra, potrebno je konstrukciju provjeriti na djelovanje valova definiranih različitim spektrom, odnosno različitom značajnom valnom visinom. U svakom od navedenih slučajeva je potrebno osigurati uvjet definiran slikom 1.



Slika 9: Primjer deformacija konstrukcije ostvarenih u vremenskoj domeni dinamičke analize i histogram komponenti i magnitudu pomaka točke P u težištu operativne površine iznad razine mora.

Na slici 10 je prikazan relativni odnos usvojene funkcije gustoće spektra valova $S(\omega)$ i frekvencijski spektar odziva konstrukcije dobiven putem FFT analize histograma pomaka točke P prikazane na slici 9. Na slici 10 se može vidjeti položaj dominantnog tona

osciliranja konstrukcije, frekvencije 0.0122 rad/s , koji se nalazi izvan domene spektra $S(\omega)$ i kojem odgovara relativno visoki period osciliranja od 8.53 min. Dobivena frekvencija dominantne oscilacije 0.0122 rad/s je prvenstveno rezultat dinamičkog uravnoteženja između superpozicije svih dinamičkih utjecaja, te unutarnjih sila i inercijalnih sila koje djeluju na konstrukciju (7). Pripadajući oblik i frekvencija osciliranja je prisutna u čitavoj vremenskoj domeni analize (120 minuta), i ne ugrožava stabilnost konstrukcije jer je manja od frekvencije najnižeg tona. S druge strane, na ovaj oblik osciliranja se prolaskom vremena superponiraju drugi oblici oscilacija, i to prvenstveno oni koji osciliraju frekvencijom bliskom prvom tonu konstrukcije. Naime, ako se dominantni ton osciliranja privremeno ukloni iz frekvencijskog spektra (slika 10 b), može se prepoznati grupiranje sljedećih dominantno prisutnih frekvencija osciliranja konstrukcije. Sukladno navedenom, tj. nakon uklanjanja najniže frekvencije osciliranja, lako se može prepoznati da se ostale prisutne frekvencije osciliranja grupiraju upravo oko prvog tona konstrukcije. Amplitude pomaka konstrukcije rastu prolaskom vremena analize (slika 9), čime se jasno ukazuje pojava rezonancije. Dakle, uzrok progresivnog povećanje pomaka konstrukcije je vidljiv u frekvencijskoj domeni, i to u vidu grupiranja pobuđenih tonova konstrukcije u okolnom području prvog tona.



Slika 10: Komparacija funkcija gustoće spektra valova $S(\omega)$ i frekvencijskog spektra odziva konstrukcije dobiven putem FFT analize histograma pomaka točke P u težištu operativne površine iznad razine mora. Na slici 10 a je prikazan cijeli spektar odziva konstrukcije, a na slici 10 b isti spektar, ali bez prisustva najniže frekvencije osciliranja, i to u svrhu ukazivanja na pobuđene frekvencije osciliranja koje se grupiraju oko prvog tona konstrukcije.

6. ZAKLJUČAK

U radu je prikazan numerički algoritam korišten u svrhu provedbe dinamičke analize primjera prostorne rešetkaste konstrukcije temeljene na morskom dnu.

Prostorna rešetkasta konstrukcija se u tu svrhu modelirala linearno-elastičnim Euler-Bernoulijevim konačnim elementima te je dinamički utjecaj mora uvažan zadavanjem funkcije gustoće spektra valova $S(\omega)$ i površinske brzine vjetra koja inducira prisutnost vjetrovne morske struje, tj. Ekmanove spirale. Polje vektora brzine v i polje vektora akceleracije a čestica mora se potom definirati superponirajuće doprinose ovih kinematičkih veličina generiranih od strane morskih valova i morskih struja. Hidrodinamičko opterećenje mora se kvantificirati koristeći Morisonov model sile. Vremenska integracija jednadžbi gibanja je provedena Newmarkovom β metodom te je u tu svrhu odabrana vrijednost integracijskih parametara β i γ koja dovodi do numeričkog algoritma eksplicitne vremenske integracije. Ovakav izbor integracijskih parametara je motiviran redukcijom broja računskih operacija koje je potrebno provesti u jednom vremenskom koraku, i to iz razloga jer se na ovaj način izbjegava rješavanje sustava algebarskih jednadžbi. U svrhu provedbe parametarskih analiza uvedena je parametrizacija geometrijskih i topoloških značajki konstrukcije. Praktični značaj uvedene parametrizacije je prepoznat u određivanju poprečnih presjeka konstrukcijskih elemenata koji će osigurati da se prvi i drugi ton konstrukcije nalaze izvan domene unaprijed zadane funkcije gustoće spektra valova $S(\omega)$.

Izbor izloženih numeričkih procedura tvori numerički algoritam koji za razmatrani više-stupanjski mehanički sustav može predvidjeti pojavu rezonancije u slučaju da izbor rasporeda mase i krutosti konstrukcije definira frekvenciju vlastitih oblika unutar domene zadane funkcije gustoće spektra valova $S(\omega)$. Za slučaj da se barem jedan

vlastiti oblik osciliranja konstrukcije nalazi u domeni funkcije $S(\omega)$, provedeni numerički primjer ukazuje na progresivno amplificiranje amplituda oscilacija upravo u obliku tona koji se nalazi u spektru $S(\omega)$ i s frekvencijom istog. Naime, FFT analizom histograma pomaka točke P je ustanovljeno da se pobuđene frekvencije osciliranja konstrukcije upravo grupiraju oko onog tona koji se nalazi u spektru $S(\omega)$.

Iako dobiveni rezultati imaju i sada praktični značaj, iz razloga jer se prikazani računarski algoritam može koristiti za provedbu preliminarnih analiza konceptualnih rješenja konstrukcija temeljenih na morskom dnu, numerički model se u ovoj inicijalnoj fazi može shvatiti kao okosnica unutar koje će se postepeno dodavati drugi fizikalni procesi putem kojih će se postepeno unaprjeđivati mogućnosti dinamičkih analiza. Daljnje istraživačke aktivnosti će se prvenstveno provoditi u pogledu implementiranja: (I.) nelinearne valne teorije, (II.) geometrijske nelinearnosti u svrhu rješavanja jednadžbi ravnoteže za deformiranu konstrukciju, (III.) materijalne nelinearnosti u svrhu dodavanja modela plastifikacije materijala, (IV.) kontaktne nelinearnosti u svrhu kvantificiranja krutosti na spoju konstrukcije s morskim dnom (V.), te će se razmotriti proširenje kataloga konačnih elemenata u modeliranju prostorne rešetkaste konstrukcije, što se prvenstveno odnosi na uvođenje tročvornih Timošenkovih grednih elemenata i pločastih elemenata na operativnoj površini rešetkaste konstrukcije. U svrhu unaprjeđenja numeričkog modela, isti će se nastaviti razvijati u programskom jeziku FORTRAN, što će omogućiti i paralelizaciju numeričkog algoritma. ■

LITERATURA

- Adrezin, R.; Bar-Avi, P.; Benaroya, H. (1996.): Dynamic Response of Compliant Offshore Structures – Review, *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 9, str. 114–131.
- Bathe, K.J. (1996.): *Finite Element Procedures*, Prentice Hall.
- Burcharth, H.F.; Hughes, S.A. (2003.): Fundamentals of Design. Coastal Engineering Manual, Part VI, Engineer Manual 1110-2-1100, U.S. Army Corps of Engineers, Washington, DC.
- Clauss, G.; Lee, J. (2003.): Dynamic Behaviour of Compliant Towers in Deep Sea, *Proceedings of OMAE03, 22nd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*.
- Chandrasekaran, S. (2017.): *Dynamic Analysis and Design of Offshore Structures*, Springer.
- Ekman, V.W. (1905.): On the influence of the Earth's rotation on ocean currents, *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik*, 2, 1-53.
- Goda, Y. (1988.): Statistical variability of sea state parameters as a function of a wave spectrum, *Coastal Engineering in Japan, JSCE*, Vol. 31, Br. 1, pp. 39-52. 483-492.
- Han, S.M.; Benaroya, H. (2001.): Vibration of a Compliant Tower in Three-Dimensions, *Journal of Sound and Vibration* 250.
- Haritos, N. (2007.): Introduction to the Analysis and Design of Offshore Structures – An Overview, *EJSE Special Issue: Loading on Structures*, str. 55–65.
- Holthuijsen, L.H. (2007.): *Waves in oceanic and coastal waters*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Jenkins, A.D.; Bye, J.A.T. (2006.): Some aspects of the work of V.W. Ekman, *Polar Record* 42.
- Journee, J.M.J.; Massie, W.W. (2001.): *Offshore Hydromechanics*, Delft University of Technology.
- Kim, C. (2008.): *Nonlinear Waves and Offshore Structures (Advanced Series on Ocean Engineering)*, World Scientific.
- Mathsoft (1993.): *Mathcad 15 - User Guide*. Mathsoft Inc., Cambridge, MA.
- Mitrović, S.; Ožbolt, J.; Travaš, V. (2014.): Three-dimensional finite element formulation for nonlinear dynamic analysis of seismic site and structure response, *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 2014.
- Mohamad, A.A.; Al-Kadhimi, A.; Shaker, M. (2012.): Dynamic Behavior of Jacket Type Offshore Structure, *Jordan Journal of Civil Engineering*, Vol. 6, str. 418–435.
- Morison, J.R.; Johnson, M.O.J.W.; Schaaf, S.A. (1950.): The force exerted by surface waves on piles, *Petroleum Transactions (American Institute of Mining Engineers)*, Vol. 189, str. 149–154.
- Sorić, J. (2004.): *Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing.
- Tabain, T. (1997.): Standard Wind Wave Spectrum for the Adriatic Sea Revisited (1977.-1997.), *Brodogradnja* 45(4), 303-313.
- Tadejević, Z.; Pršić, M. (1981.): *Pomorska hidraulika, I. dio – idealni valovi i struje*, Fakultet građevinskih znanosti – Zagreb, Zagreb.
- Travaš, V.; Kožar, I. (2008.): Statička i dinamička analiza prostorne lančanice, *Građevinar* 59.
- Travaš, V.; Kravica, N. (2014.): Spektralni i monokromatski pristup definiranju hidrodinamičkog opterećenja na vertikalne pilote, *Hrvatske vode*, Vol. 22, str. 13–22.
- USFOS: Hydrodynamics, Theory, Description of use Verification, *Reality Engineering*, 2010.
- Wilson, E. (1995.): *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, USA.
- Zienkiewicz, O.; Lewis, R.; Stagg, K. (1978.): *Numerical Methods in Offshore Engineering*, Wiley.

Numerical model of compliant tower oscillations

Abstract. For the purpose of conducting a dynamic analysis of compliant towers, a numerical algorithm was developed for calculating the structure of the movement field caused by hydrodynamic action of the sea. The stochastic nature of wave spreading in the sea is introduced into the analysis through the function of power spectral density of waves. The structure's wave load is then defined by applying the Morison model of force action. Kinematic parameters of waves are defined by the linear theory. The wind impact on the distribution of marine circulation in the vertical direction is taken into account in the context of the Ekman spiral. The compliant tower is modelled with spatial Euler–Bernoulli finite elements. The initiation of the dynamic calculation starts with the determining the movement field resulting from static activity of buoyant force, dead and permanent loads. The integration of the equations of motion is performed by applying the Newmark- β method. To develop numeric parameters, the presented algorithm is implemented in the MathCAD 15 programming environment. The numerical parameters include the analysis of free and forced oscillations of the structure and the FFT analysis of the records of the centre of gravity shift of the structure's operating surface.

Key words: dynamic analysis, hydrodynamic loads of the sea, modal analysis, compliant tower, resonance, static analysis

Numerische Modellierung von Eigenschwingungen einer Turmplattform mit Gitterstruktur

Zusammenfassung. Um eine dynamische Analyse von Offshore-Turmplattformen mit Gitterstruktur (eng. compliant tower) durchzuführen, ist ein numerischer Algorithmus zur Berechnung vom Bereich der Turmplattformverlagerung durch die hydrodynamische Wirkung des Meeres entwickelt worden. Die stochastische Natur der Wasserwellenausbreitung wurde in die Analyse anhand der Funktion der Kraftdichte des Wellenspektrums eingeführt. Die Belastung der Turmplattform durch die Wellen wurde dann mithilfe der Morison-Gleichung für die Kraftwirkung berechnet. Kinematische Parameter der Wellen wurden mittels der linearen Stabilitätstheorie bestimmt. Die Wirkung des Windes auf die Verteilung der Meeresströmungen in der vertikalen Richtung wurde durch die Ekman-Spirale in Betracht gezogen. Die Gitterstruktur wurde mit räumlichen Euler-Bernoulli finiten Elementen modelliert. Die dynamische Berechnung beginnt mit der Bestimmung des Bereiches der Verlagerung, die durch die Wirkung des statischen Auftriebs, der Nutzlast und der ständigen Last entsteht. Die Bewegungsgleichungen wurden mit dem Newmark-beta-Verfahren integriert. Um die numerischen Beispiele zu erstellen, wurde der vorgestellte Algorithmus in die Software MathCAD 15 implementiert. Die numerischen Beispiele schließen eine Analyse von freien und erzwungenen Schwingungen sowie die FFT-Analyse der Aufzeichnungen der Verlagerung des Schwerpunktes der Turmplattformarbeitsfläche ein.

Schlüsselwörter: dynamische Analyse, hydrodynamische Meeresbelastung, Modalanalyse, Raumgitter, Resonanz, statische Analyse