

UDK 519.8

Prethodno priopćenje

Prof. dr. Dražen Barković*

KARMAKOV ALGORITAM

1. UVOD

Premda je simpleks metoda algoritam koji se najčešće koristio i koristi za rješavanje linearnih programa, krajem 1980-ih godina pojavljuju se u krilu operacijskih istraživanja vrlo različite nove strategije. Nova **interior point** metoda slijedi poboljšanu paradigmu za rješavanje linearnog programa, ali ona primjenjuje kretanje posve drugačije od onog u simpleks metodi. Umjesto da se ostane na granicama dopuštenog područja i da se kreće od jedne ekstremne točke do druge, **interior point** metoda napreduje izravno kroz unutrašnjost dopuštenog područja.

Potrebno je uložiti mnogo računskog napora u tom kretanju, ali njegov se broj dramatično smanjuje. U mnogim velikim linearnim programima postiže se bitno kraće vrijeme u pronalaženju rješenja od onog kod simpleksa.

Prvu komercijalnu **interior point** metodu za linearno programiranje razvio je Narendra Karmarkar na temelju procedure projektivne transformacije, a razvoj se nastavlja do današnjih dana.¹

Iako će se simpleks metoda koristiti i dalje u mnogim linearnim programima, nova generacija software-a razvijena na temelju Karmarkova algoritma postaje popularna. Američka zrakoplovna kompanija Delta prva je komercijalna zrakoplovna kompanija koja koristi Karmarkov program, zvan KORBX, koji je razvio i prodao AT&T. Delta vjeruje da je taj program pospješio mjesečni raspored 7000 pilota koji lete na više od 400 zrakoplova u 166 gradova svijeta. Radi povećane efikasnosti računa se na uštedu od više milijuna dolara na vremenu posade i odgovarajućim troškovima.²

Sve metode relativno su matematički kompleksne s mnogim pojedinostima.

* Ekonomski fakultet u Osijeku

¹ Rardin, L.R.: Optimization in Operations Research, Prentice-Hall, London, 1998, str. 251.

² Rendeer, B., Stair, R.M.: Quantitative Analysis for Management, Prentice-Hal, New Yersey, 1997, str. 422.

2. IDEJA KARMARKOVE METODE

Zadani linearni problem³

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ \text{uz ograničenja} & \quad Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

kada je $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$ a varijable odlučivanja $x \in R^n$ u R^n , može se prevesti u problem R^{n+1} koji je u pogledu rješenja ekvivalentan s (1):

$$\begin{aligned} & \min \bar{c}^T \bar{x} \\ \text{uz ograničenja} & \quad \bar{A}\bar{x} = 0 \\ & \quad \sum_{j=1}^{n+1} \bar{x}_j = 1 \\ & \quad \bar{x} \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Pretpostavlja se da je poznato dopušteno rješenje $x^0 \in R^n$ za problem (1), čija je transformirana vrijednost u problemu (2) dana s

$$\bar{x}^0 = \frac{1}{n+1}(1, \dots, 1)^T \in R^{n+1}.$$

Neka je sada data k -ta iteracijska točka \bar{x}^k kao dopušteno rješenje od (2). Pomoću transformacije T_k preslikava se dopušteno područje (2) na taj način u jedinični simpleks

$$L = \left\{ \bar{x} \in R^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} \bar{x}_j = 1, \bar{x} \geq 0, \bar{x}_{n+1} > 0 \right\}$$

da se transformacija T^k (\bar{x}^k iteracijske točke \bar{x}^k nalazi u središtu

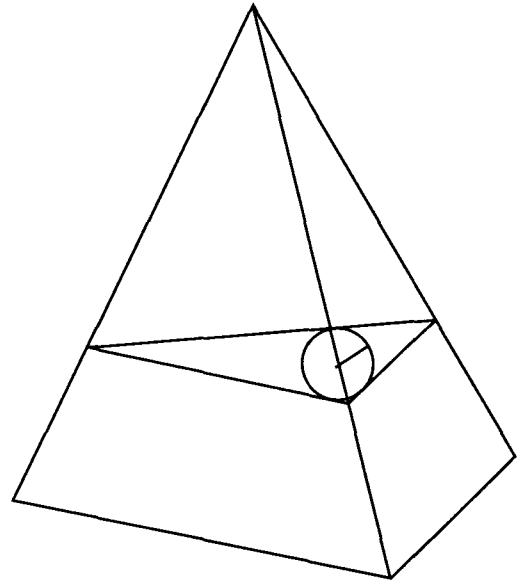
$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right)^T \in R^{n+1}$$

tog jediničnog simpleksa R^{n+1} .

Tada se u taj transformirani prostor rješenja postavlja kugla sa središtem u $T^k(\bar{x}^k)$ s čvrstim radijusom koji je neovisan o k . Iz središta kugle $T^k(\bar{x}^k)$ ide se podesnom veličinom koraka α u smjeru negativnog projiciranog gradijenta funkcije cilja, tj. ide se u smjeru najstrmijeg pada funkcije cilja. Optimalna je veličina koraka $\alpha = 0.5$ neovisno o

broju k iteracija.⁴ Tako se dolazi u točku $T^k(\bar{x}^{k+1})$ u $(n+1)$ dimenzionalnom jediničnom simpleksu i povratnom transformacijom T_k^{-1} u novu točku iteracije \bar{x}^{k+1} . Točka \bar{x}^{k+1} nije doduše nužno bolja od \bar{x}^k , a to znači da nije bezuvjetno $\bar{c}^T \bar{x}^{k+1} < \bar{c}^T \bar{x}^k$, ali nakon konačnog broja koraka bit će vrijednost funkcije cilja $\bar{c}^T \bar{x}^k$ zapravo smanjena ako se pode od \bar{x}^k . Sve učestale točke proizvedenog niza $\{\bar{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ su optimalna rješenja od (2).

Slika 1.: Presjek jediničnog simpleksa u R^4 s linearnim prostorom R^2



3. OSNOVNA VERZIJA METODE PROJEKCIJE

A) NORMIRANJE PROBLEMA

Karmarkova metoda u svojoj osnovnoj verziji služi da bi se riješilo tzv. Standardni model linearnog programiranja (LP):

$$\begin{aligned} & \min c^T x - c^* \\ \text{uz ograničenja} & \quad Ax = b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

kada je $b \in R^m$, $c \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$.

³ Zimmermann, H. J.: Operations Research Methoden und Modelle, Für Ingenieure, Ökonomen und Informatiker, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1992, str. 138-141.

⁴ Npr. Beisel, Mendel, 1987., str. 185.

Uz to se treba uzeti u obzir dodatne uvjete ograničenja:

(1) c^* se izabire tako da optimalna vrijednost funkcije cilja od (3) bude jednaka 0

(2) poznato je dopušteno početno rješenje $x^0 > 0$.

Budući da se Karmarkova metoda može proširiti i na općenite probleme LP, u nastavku ćemo prikazati osnovnu verziju. Da bi se Karmarkova metoda mogla primijeniti, mora se najprije problem (3) podvrgnuti tzv. projektivnoj transformaciji, pomoću koje se područje rješenja (3), a koje predstavlja jedan podskup od R^n postavlja u jedinični simpleks R^{n+1} , pri čemu se početno rješenje preslikava u središte tog simpleksa.

Jedinični simpleks u R^{n+1} definira se kako slijedi:

$$L = \left\{ \bar{x} \in R^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} \bar{x}_j = 1, \bar{x}_j \geq 0, \bar{x}_{n+1} > 0 \right\}. \quad (4)$$

Iz problema (3) dobiva se pomoću takve projekcije sljedeći problem:

$$\min \bar{c}^T \bar{x}$$

$$\bar{A}\bar{x} = 0, \bar{x} \geq 0 \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \bar{x}_j = 1.$$

Može se pokazati da su problemi (3) i (5) [Karmarkar 1984, Beisel, Mendel 1987], ekvivalentni u smislu da svako dopušteno rješenje prvog problema, odgovora dopuštenom rješenju drugog (5) i da su vrijednosti obiju funkcija jednake i poprimaju vrijednost 0, upravo tada kada rješenja predstavljaju ujedno optimalna rješenja problema. To znači da se iz optimalnog rješenja (5) s vrijednosti funkcije cilja 0, može izračunati optimalno rješenje za (3). Ako je optimalno rješenje u (5) veće od 0, problem (3) nema rješenja.

Propis transformiranja preko kojeg se oba problema međusobno prevode jedan u drugi, pokazuje ekvivalenciju definiranu kako slijedi:

$$T: R^n \rightarrow R^{n+1}$$

$$x \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{e^T D^{-1}x + 1} \left((D^{-1}x)^T, 1 \right)^T, \quad (6)$$

gdje je $D = \text{diag}(x^0) = \begin{bmatrix} x_1^0 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & x_n^0 \end{bmatrix}$

$e \in R^n$ s $e^T = (1, \dots, 1)$ i $x^0 > 0$ predstavlja dopušteno rješenje problema (3). Time vrijedi

$$x \in R^n, x \geq 0 : T(x) \geq 0 \text{ i}$$

$$(T(x))_j := \bar{x}_j = \frac{x_j / x_j^0}{\sum_{j=1}^n x_j / x_j^0 + 1} \text{ za sve } j = 1, \dots, n \quad (7)$$

i

$$(T(x))_{n+1} := \bar{x}_{n+1} = 1 - \sum_{j=0}^n \bar{x}_j > 0.$$

Kako se može pokazati (Karmarkar, 1984, Beisel, Mendel, 1987), vrijedi $T(R^n) \subseteq L$. Tako je svaki podskup iz R^n pomoću T preslikan u podskup jediničnog simpleksa L . Dalje, T je jedinično preslikavanje, koje se može obrnuti, znači da postoji inverzno preslikavanje $S = T^{-1}$, sa $S(T(x)) = x$ za sve $x \in R^n$, koje se odvija kako slijedi:

$$S: L \rightarrow R^n,$$

$$\bar{x} = x = \frac{1}{\bar{x}_{n+1}} DP(\bar{x}). \quad (8)$$

P je projekcija na R^n , koja preslikava prvih n komponenti jednog vektora $\bar{x} \in R^{n+1}$ na vektor prostora R^n , koji se sastoji iz tih komponenti, dakle

$$P: R^{n+1} \rightarrow R^n$$

$$P: \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \rightarrow (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = x. \quad (9)$$

Vrijedi

$$x_j = \frac{\bar{x}_j \bar{x}_{n+1}^0}{\bar{x}_{n+1}} \text{ za } j = 1, \dots, n.$$

Pomoću T, S može se problem (3) prevesti na problem (5).

B) KARMARKOV ALGORITAM

Sada ćemo prema predočenom Karmarkovu postupku rješavati problem (5). Polazeći od dopuštenog rješenja $x = T(x^0)$, određuju se iterativnim putem niz točaka \bar{x}^k u području rješenja koje konvergiraju prema optimalnom rješenju problema (6). Sada se odnosna točka \bar{x}^k pomoću transformacije T_k , koja je jako slična preslikavanju T , preslikava u

središte jediničnog simpleksa. Tu je riječ o namjeri da se u tu vrstu deformiranog modificiranog prostora rješenja P_k postavi kugla sa konstantnim radijusom, na čijem se rubu kreće u smjeru negativnog projiciranog gradijenta, i polazeći od središta određuje novo rješenje za deformiran problem P_k . U nastavku se točka \bar{y}_{k+1} preko preslikavanja S_k prevodi u točku \bar{x}_{k+1} , pa se nastavlja s procedurom. Preslikavanje T_k i $(T_k)^{-1} = S_k$ koja se ovdje primjenjuje definirana kako slijedi:

Neka su za $k \in \mathbb{N}$ i $\bar{x}_k \in L$ uz $\bar{x} \in L$:

$$T_k : L \rightarrow R^{n+1} \quad (10)$$

$$T_k : \bar{x} \rightarrow y = \frac{D_k^{-1} \bar{x}}{e^T D_k^{-1} \bar{x}},$$

gdje je $D_k = \text{diag}(\bar{x}^{-k}), e \in R^{n+1}, e^T = (1, \dots, 1)$

$$S_k : L \rightarrow R^{n+1}$$

$$S_k : \bar{x} \rightarrow \frac{D_k \bar{x}}{e^T D_k \bar{x}}. \quad (11)$$

Ti se u svakom iteracijskom koraku pojavljuje deformirani problem P_k u obliku

$$(P_k) : \min \bar{c}_k^T \bar{y}$$

$$B_k \bar{y} = 0 \quad (12)$$

$$\bar{y} \geq 0$$

uz

$$\bar{c}_k = D_k \bar{c}, \quad B_k = \begin{pmatrix} A D_k \\ e^T \end{pmatrix}.$$

Deformacija problema događa se u namjeri da se prevladaju slabosti projekтивne metode. To je uvjetovano time što se kod projekтивne metode vrlo brzo dolazi do točke koje se nalaze u blizini ruba područja rješenja. Radi toga se u sljedećim iteracijskim koracima može napredovati u malim koracima, što dovodi vrlo brzo do grešaka u zaokruživanju, koje se negativno reflektiraju na brzinu, kvalitetu i točnost rješenja. To se sprečava transformacijom u središte jediničnog simpleksa jer se u takvom modificiranom problemu u svakom koraku mogu realizirati jednako veliki koraci. Ti konstantno veliki koraci α u svakoj iteraciji uvjetuju polinomno ograničenje metode i na taj način imaju utjecaj na efektivnost rješenja. Karmarkar se odlučio na temelju logaritamske funkcije potencija pomoću koje se u svakom iterativnom

koraku postiže konstantno minimalno poboljšanje funkcije cilja.

Algoritam se može napisati na sljedeći način:⁵

Algoritam

0. korak

$$T^0 = id, a^0 = \bar{x}^0 = (1/(n+1), \dots, 1/(n+1))^T$$

$$k = 0$$

1. korak (Transformacija T_k)

$$a^0 = T_k(\bar{x}^k)$$

$$B_k = \begin{pmatrix} \bar{A} D_k \\ e^T \end{pmatrix}, \bar{c}_k = D_k \bar{c} = D_k \bar{c}$$

2. korak (Projicirani gradijent)

$$\text{grad}_k = \bar{c}^T D_k \left[I - B_k^T (B_k B_k^T)^{-1} B_k \right]$$

$$\widehat{\text{grad}}^k = \frac{\text{grad}_k}{\|\text{grad}_k\|}$$

3. korak

Staviti

$$\bar{y}^{k+1} = a^0 - \alpha \widehat{\text{grad}}^k$$

4. korak (Povratna transformacija)

odrediti

$$\bar{x}^{k+1} = S_k(\bar{y}^{k+1})$$

5. korak (kriterij prekida)

Ako vrijednost funkcije cilja nije dovoljno mala, preći na 2. korak, inače na korak broj 6.

6. korak

\bar{x}^{k+1} je optimalno rješenje od (5)

Odrediti $\bar{x}^{\text{opt}} = S(\bar{x}^{k+1})$ kao optimum za (3).

Primjer

$$\min z = x_1 - 2x_2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

⁵ Zimmermann, ibidem, str. 143.-144.

Iteracija 1

0. Korak

$$a^0 = \bar{x}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

$$k = 0, r = \frac{1}{\sqrt{6}}, \alpha = \frac{2}{9}, z = -0.333333$$

1. Korak

$$a^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\bar{A} = (1, -2, 1) \quad D_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \bar{A}D_0 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$e^T = (1, 1, 1)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c^0 = c^T D_0 = D_0 c = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)^T$$

2. Korak

$$\text{grad}^0 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}\right)^T$$

$$\|\text{grad}^0\| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = 0.2357$$

$$\widehat{\text{grad}}^0 = \frac{1}{0.2357} \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}\right)$$

3. Korak

$$\bar{y}^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T + \frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{0.2357} \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}\right)^T$$

$$\bar{y}^1 = (0.397483, 0.333333, 0.269183)^T$$

4. Korak

$$\bar{x}^1 = S_0(\bar{y}^1), \quad \bar{x}^1 = \frac{D_0 \bar{y}^1}{e^T D_0 \bar{y}^1}$$

D_0 ima jednake elemente na glavnoj dijagonali

($= \frac{1}{3}$) a iz činjenice da je $e^T y = 1$ gornja formula daje

$$\bar{x}^1 = \bar{y}^1 = (0.397483, 0.333333, 0.269183)^T$$

5. Korak

$z = -0.269183$, što je bolje od ranijeg rješenja
 $z = -0.333333$

Iteracija 2

2. Korak ($k = 1$)

$$c^T D_1 = (1, -2, 1) \begin{bmatrix} 0.397483 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.269183 \end{bmatrix} =$$

$$= (0.397483, -0.666666, 0)$$

$$\bar{A}D_1 = (1, -2, 1) \begin{bmatrix} 0.397483 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.269183 \end{bmatrix} =$$

$$= (0.397483, -0.666666, 0.269183)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.397483 & -0.666666 & 0.269183 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{grad}^1 = (0.132402, 0.018152, -0.150555)$$

$$\|\text{grad}^1\| = 0.201312$$

$$\widehat{\text{grad}}^1 = \frac{1}{0.201312} (0.132402, 0.018152, -0.150555)$$

3. Korak

$$\bar{y}^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T + \frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{0.201312} (0.132402, 0.018152, -0.150555)^T$$

$$\bar{y}^2 = (0.393001, 0.341514, 0.265486)^T$$

4. Korak

$$\bar{x}^2 = S_1(\bar{y}^2), \quad \bar{x}^2 = \frac{D_1 \bar{y}^2}{e^T D_1 \bar{y}^2}$$

$$D_1 \bar{y}^2 = \begin{bmatrix} 0.156212 \\ 0.113838 \\ 0.071764 \end{bmatrix} \quad e^T D_1 \bar{y}^2 = 0.341514 \quad \bar{x}^2 = \begin{bmatrix} 0.457411 \\ 0.333333 \\ 0.204256 \end{bmatrix}$$

5. Korak

$$z = 0.20934$$

Ponavljajući korake iz algoritma, rješenje će se pomaknuti prema optimalnoj točki $(2/3, 1/3, 0)$.

LITERATURA:

1. Beisel, E. P., Mendel, M.: Optimierungsmethoden des Operations Research, Lineare und ganzzahlige lineare Optimierung, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1987.
2. Karmarkar, N.: A new Polynomial-time Algorithm for Linear Programming, u Proceedings of the 16th Annual ACM Symposia on the Theory of Computing, Washington, 1984.
3. Rendeer, B., Stair, R. M.: Quantitative Analysis for Management, Prentice-Hall, New Yersey, 1997.
4. Taha, A. H.: Operations Research, An Introduction, Prentice-Hall, Singapore, 1995.
5. Zimmermann, H. J.: Operations Research Methoden und Modelle, Für Ingenieure, Ökonomen und Informatiker, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.