UDK 336.78
Pregledni članak

Prof. dr. sc. Miljenko Crnjac*
Dr. sc. Branimir Marković**
Doc. dr. sc. Petar Proklin***

RIJEČ DVIJE O KAMATNIM STOPAMA

1. POJAM KAMATA

U suvremenim se uvjetima pojam kamate uglavnom veže za novac, iako je prije pojave novca postojao naturalni kredit koji je donosio kamatu u naturi. Tada je dužnik osim glavnice, morao vjerovniku vratiti i kamatu, ali u istoj, konkretnoj robi u kojoj je dan kredit.

Kada govorimo o novčanom, odnosno kreditnom gospodarstvu, kamatu možemo promatrati kao nagradu ili naknadu koja se daje za korištenje tuđih zamjenjivih stvari na određeno vremensko razdoblje. Prema tome, kamata predstavlja oblik dohotka od vlasništva, a predstavljena potraživanjem vlasnika određenih vrsta financijske aktive kao što su zajmovi ili krediti, depoziti, vrijednosnice osim dionica i ostali računi potraživanja. Ove vrste financijske aktive (promatrano računovodstveno) predstavljaju potraživanje vjerovnika od dužnika. Vjerovnici pozajmljuju dužnicima sredstva koja vode stvaranju određenog financijskog instrumenta. Iznos dužnikove obveze prema vjerovniku u bilo koje vrijeme može biti opisan kao neotplaćena glavnica. To je iznos koji dužnik mora otplatiti da bi se riješio obveze i time ugasio vjerovnikovo potraživanje prema dužniku.

U ovakvim transakcijama između vjerovnika i dužnika ugovara se i kamata koja predstavlja onaj iznos, prema sporazumu o uvjetima financijskog instrumenta (npr. kredita), koji je dužnik obvezan platiti vjerovniku za dano vremensko razdoblje bez smanjenja iznosa neotplaćene glavnice.

Međutim, kamata ne mora nužno dospjeti na naplatu do nekog kasnijeg datuma i ponekad ne mora dospijevati sve dok zajam (kredit) ili drugi financijski instrument ne dospije. Ako neka ili sva kamata, koja pripada vjerovniku, nije plaćena tijekom dotičnog razdoblja, može se dodati (pripisati) iznosu neotplaćene glavnice ili se može odrediti dodatna, odvojena obveza koja nastaje za dužnika. Zato se kamata bilježi prema obračunskom principu tj. kamata se bilježi kako kontinuirano nastaje tijekom vremena za vjerovnika za iznos neotplaćene glavnice. Kamata koja se obračunava također iznos potraživanja vjerovnika i obveza dužnika. Ona može biti unaprijed određen iznos novca ili postotak neotplaćene glavnice, a prikazuje se kamatnom stopom.

2. KAMATNA STOPA

Najjednostavnije, kamatnu stopu (kamatnjak) možemo definirati kao iznos kamata za 100 novčanih jedinica duga za neko vremensko razdoblje.

*Ekonomski fakultet u Osijeku
**Ekonomski fakultet u Osijeku
***Ekonomski fakultet u Osijeku

Kad je dužnik u mogućnosti riješiti se obveze prema vjerovniku otplaćivanjem glavnice jednake novčanoj vrijednosti uzajmljenih sredstava, kamate koje se vežu opisuju se kao nominalne pa govorimo o nominalnoj kamatnoj stopi. Takvo plaćanje kamata ne predstavlja realan povrat vjerovniku jer on uz pretpostavku postojanja rizika gubitaka (npr. gubitak glavnice, neplaćanje kamata, inflatorni gubici i sl.) očekuje da će dobiti veću kamatu pa obračunava realnu kamatnu stopu. U uvjetima inflacije kupovna moć vraćenih sredstava manja je nego kad su sredstva bila pozajmljena, pa plaćanje nominalnih kamata, koje se zahtijeva od vjerovnika, obično raste da bi se kompenzirali gubici kupovne moći koje očekuju kad bi se njihova sredstva konačno vratila.

Drugim riječima, u idealnim gospodarskim uvjetima kada ne postoje inflacija ili deflacija, nominalna kamatna stopa jednaka je realnoj kamatnoj stopi. No, kako suvremeni svijet u praksi svojih gospodarstava poznaje kontinuirano opadanje kupovne snage novca, (znači, inflaciju) nominalna se i realna kamatna stopa razlikuju, a njihov se odnos može prikazati sljedećom formulom:

Nominalna kamatna stopa = realna kamatna stopa + očekivana stopa inflacije + (realna kamatna stopa x očekivana stopa inflacije)

Iz ove je formule vidljivo da se realna kamatna stopa izračunava na temelju očekivane, a ne stvarne stope inflacije što je razlog načina ugovaranja kredita koji se ugovaraju unaprijed. Praktično je nemoguće točno znati kakva će biti stopa inflacije od datuma ugovaranja kredita (znači od danas) u odnosu na datum dopsijeća kredita pa se stopa inflacije predviđa kako bi se izračunala realna kamatna stopa.

3. ANALIZA KAMATNIH STOPA

Razmatranje započnimo investicijom od 1 za razdoblje 1 vremenske jedinice, koja započinje u trenutku t tako da se 1+i(t) vraća u trenutku t+1. Uobičajeno je i(t) nazivati efektivna kamatna stopa za promatrano razdoblje. Pretpostavimo da kamatna stopa (ili kamatnjak) ne ovisi o investiranom novcu. Tada će se investiranjem iznosa C u trenutku t dobiti u trenutku t+1 iznos C+Ci(t), tj. C[1+i(t)]. Nadalje, nije teško zaključiti da će investicija iznosa C u trenutku 0 dati akumulirani iznos u trenutku n gdje je n prirodni broj,

$$C\,[1+i(0)]\cdot[1+i(1)]\ldots[1+i(n-1)] \quad (1)$$

Zaista, dospijeće C [1+i(0)] se u trenutku 1 može dalje investirati pa će u trenutku 2 dati C [1+i(0)] [1+i(1)] itd.

Uobičajeno je kamatne stope izražavati u postocima, pa možemo govoriti o efektivnoj kamatnoj stopi za neko razdoblje recimo $3\frac{1}{4}$ %, što bi značilo da je efektivna kamatna stopa za to razdoblje (period) 0,325.

Ako kamatna stopa ne ovisi o vremenu t kad je investicija realizirana, tada pišemo jednostavno i (t)) i. Uvažavajući prethodno, (1) poprima oblik

$$C\,(1+i)^n \quad (2)$$

3.1. Nominalna kamatna stopa

Neka je obavljena transakcija za razdoblje h vremenskih jedinica, h > 0 i h ne mora biti prirodan broj. Definirajmo $i_h(t)$, nominalnu kamatnu stopu po jedinici vremena za transakcije duljine h koje započinju u trenutku t, kao onu kamatnu stopu za koju je efektivna kamatna stopa za period duljine h, s početkom u trenutku t, jednaka $hi_h(t)$. Prema definiciji, ako je iznos C investiran u trenutku t za razdoblje h, iznos koji ćemo dobiti u trenutku t +h je

$$C\,[1+hi_h(t)] \quad (3)$$

U slučaju da je h = 1 nominalna se kamatna stopa poklapa sa efektivnom kamatnom stopom za vrijeme od t do t+1, tj.

$$i_1(t)=i(t) \quad (4)$$

U praksi često $i_h(t)$ ne ovisi o t pa možemo pisati

$$i_h(t)=i_h \quad (5)$$

Pretpostavimo li da je $h=\frac{1}{p}$, gdje je p prirodan broj, uobičajeno je pisati $i^{(p)} = i_{1/p}$. Slijedi da će investicija od 1 za bilo koje razdoblje duljine 1/p dati povrat

$$1+\frac{i^{(p)}}{p} \quad (6)$$

Napomenimo da je $i^{(p)}$ nominalna kamatna stopa po jedinici vremena koja se pripisuje po p-tim dijelovima.

3.2. Akumulacijski faktori

Definirajmo A (t_1, t_2) kao akumulaciju u trenutku t_2 neke investicije iznosa 1 koja je započeta u trenutku t_1, gdje je $t_1 \leq t_2$. A (t_1, t_2) je iznos koji će biti isplaćen u trenutku t_2 kao povrat za investiciju iznosa 1 započetu u trenutku t_1, tj.

$$A(t, t+h) = 1 + h\, i_h(t) \qquad (7)$$

Specijalno $A(t, t) = 1$ za svako t.

Iz (7) imamo

$$i_h(t) = \frac{A(t,t+h)-1}{h} = h>0 \qquad (8)$$

Budući da je akumulacija u trenutku t_2 investicije C koja je započeta u trenutku t_1 upravo $C\cdot A(t_1,t_2)$, otuda broj $A(t_1,t_2)$ nazivamo akumulacijski faktor.

Na tržištu akumulacije ne bi smjele ovisiti o redoslijedu akcija koje poduzima investitor, tj.

$$A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1)\, A(t_1, t_2) \ldots A(t_{n-1}, t_n) \qquad (9)$$

Naime, ako imamo jednu investiciju iznosa 1 u trenutku t_0, $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, tada će akumulacija u trenutku t_2 biti $A(t_0, t_2)$, za razdoblje $t_2 - t_0$, odnosno $A(t_0, t_1)$ $A(t_1, t_2)$ ako se investira u trenutku t_0 za razdoblje $t_1 - t_0$, a zatim u trenutku t_1 za razdoblje $t_2 - t_1$.

3.3. Intenzitet kamata

Neka za svaku vrijednost od t postoji broj $\delta(t)$, takav da je

$$\lim_{h\to 0^+} i_h(t) = \delta(t) \qquad (10),$$

pri čemu $\delta(t)$ nazivamo intenzitet kamata ili trenutačno promjenjiva nominalna kamatna stopa po jedinici vremena u trenutku t.

Iz jednadžbi (8) i (10) možemo dobiti intenzitet kamata po jedinici vremena u trenutku t u obliku akumulacijskog faktora

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{A(t,t+h)-1}{h}\right] \qquad (11)$$

Ako je u pitanju konzistentno tržište i vrijedi princip konzistencije, moguće je akumulacijski faktor prikazati pomoću intenziteta kamata.

Neka su $\delta(t)$ i $A(t_0, t)$ neprekidne funkcije za $t \geq t_0$ i neka vrijedi princip konzistencije, tada za $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ vrijedi

$$A(t_1,t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt} \qquad (12)$$

Znajući intenzitet kamata koristeći formulu (12), možemo prema formuli (8) odrediti $i_h(t)$ (nominalnu kamatnu stopu).

$$i_h(t) = \frac{e^{\int_t^{t+h}\delta(v)dv}-1}{h} \qquad (13)$$

Od praktičnog je značenja slučaj $\delta(t) = \delta$ za svako t i tada vrijedi $A(t_0, t_0+n) = e^{\delta n}$ (14) za svako t_0 i n prirodan broj. Iz formule (13) imamo

$$i = e^{\delta} - 1 \qquad (15)$$

$$\text{tj. } e^{\delta} = 1 + i \qquad (16)$$

Dakle, akumulacijski faktor $A(t_0, t_0+n)$ možemo pisati u obliku $A(t_0, t_0+n) = (1+i)^n$ (17)

Neka je $f(t) = A(t_0, t)$ (18) gdje je $t_0 \leq t$ i t_0 fiksno, tada je $f(t)$ akumulacija investicije 1 započete u trenutku t_0.

Iz formule (12) imamo

$$\ln f(t) = \int_{t_0}^{t}\delta(v)dv \qquad (19),$$

pa je $\delta(t) = \frac{d}{dt}\ln f(t) = \frac{f'}{f(t)}$ (20) za $t \geq t_0$.

Ako imamo dva vremenska trenutka t_A i t_B, integriranjem formule (20) od t_A do t_B imamo

$\ln f(t)\Big|_{t_A}^{t_B} = \int_{t_A}^{t_B}\delta(t)dt$. Slijedi

$\ln f(t_B) - \ln f(t_A) = \int_{t_A}^{t_B}\delta(t)dt$. Djelujući s eksponencijalnom funkcijom objema stranama dobivamo

$\frac{f(t_B)}{f(t_A)} = e^{\int_{t_A}^{t_B}\delta(t)dt}$, odakle vrijedi

$f(t_B) = f(t_A)e^{\int_{t_A}^{t_B}\delta(t)dt}$, odnosno

$$A(t_0, t_B) = A(t_0, t_A)\, e^{\int_{t_A}^{t_B}\delta(t)dt}$$

4. ZAKLJUČAK

Poznavanje kamata i kamatnih stopa u suvremenim novčanim, odnosno kreditnim gospodarstvima od izuzetne je važnosti. Pri sklapanju kreditnih ugovora, zbog utjecaja inflacije, razlika između nominalne i realne kamatne stope izravno utječe na tokove novca, a u konačnici na financijski rezultat poduzetnika. U radu je dan jedan novi matematički pristup teoriji kamatnih stopa.

LITERATURA:

1. Crnjac M. ; Jukić,D. ; Scitovski, R.: Matematika, Osijek (1994)

2. Crnjac, M.: Gospodarska matematika, Osijek (1997)

3. Muškardin, V.: Suvremeni pristup financijskoj matematici, Ekonomska analiza 19 (1985), 75-99.

4. Rebić, B. ; Šego, B.: Financijska matematika, Zagreb (1990)

5. Scitovski, R.: Ispodgodišnje ukamaćivanje, Ekonomska analiza 21 (1987), 243-257.

6. Franciśković, D.: Generalizacija kontinuiranog ukamaćivanja i strategije otplate duga, Ekonomska analiza 24 (1990), 179-198.

7. Van Horne, J.C.: Financijsko upravljanje i politika (Financijski menedžment), deveto izdanje MATE d.o.o. Zagreb, 1993.

8. Perišin,I. ; Šokman, A.: Monetarno kreditna politika, Informator, Zagreb, 1992.

9. Miller, R.L.; Van Hosse, D.D.: Moderni novac i bankarstvo, treće izdanje, MATE d.o.o., Zagreb, 1993.

10. Srb, V. ; Marković, B.: Monetarno - kreditna politika, Ekonomski fakultet, Osijek, 1999.

11. Deželjin, J. i drugi: Računovodstvo, RiF, Zagreb, 1995.

12. Helfert, E.A.: Tehnike financijske analize, sedmo izdanje, RiF, Zagreb, 1997.