UDK: 165.62:51/53
Izvorni znanstveni članak
Primljen 22. X. 2017.

Edo Pivčević
Bristol
edopivcevic@virginmedia.com

BESKONAČNOST I MATEMATIČKA ISTINA

Sažetak

U članku se raspravlja o problemu beskonačnosti, s posebnim naglaskom na pitanje „matematičke istine“. Korijeni ovoga problema su u izvjesnome smislu vezani za rane pokušaje da se racionalno objasni fenomen mijene, posebice fenomen gibanja, u prirodi, te s tim u vezi rasvijetli kompleksni odnos između kontinuiteta i diskretnosti. Ako je matematika sredstvo racionalnoga opisa svijeta, je li moguće konstruirati matematički model pojavne neprekinutosti? To je pitanje postavio već Zenon kada se pitagorejska hipoteza o esencijalnoj 'zrnatosti' svijeta počela lomiti na problemu nesumjerljivih veličina. Otkriće nesumjerljivih veličina i s tim u vezi otkriće iracionalnih brojeva, urodilo je poznatim paradoksima beskonačnosti i kao rezultat toga postavilo se pitanje koliko matematika može, ako uopće može, pružiti 'metafizički' opis fizičkoga svijeta.U novije doba ideja je beskonačnosti ugrađena u infinitezimalni račun, koji je postao temeljni matematički instrument novovjekovne znanosti. No pitanja aktualne i potencijalne beskonačnosti su još uvijek predmet žestokih rasprava. Dok jedni smatraju da beskonačno postoji samo potencijalno, drugi, kao npr. Georg Cantor, tvrde da postoji aktualna beskonačnost. S tim je u vezi i pitanje matematičke istine za koju platonisti vjeruju da postoji kao objektivna datost. Autor članka zaključuje da kantorovska teorija skupova (u biti platonistička ideja) ne može izdržati kritike i da matematika zapravo ne opisuje zbilju nego samo nudi modele za bolje tumačenje svijeta. Matematika i tzv. 'matematička istina' svode se na odgovor je li nešto ispravno ili neispravno, tj. dosljedno izvedeno iz premisa, a ne je li istinito ili neistinito.

Ključne riječi: matematika; istina; diskretnost; kontinuitet; nesumjerljivost

i.

Beskonačnost se ljudskomu umu prikazuje u prvome redu kao neka vrsta procesa; naime (a) kao zamišljena beskonačna djeljivost nekih određenih veličina, (b) kao neograničeno povećavanje nekih određenih veličina, (c) kao beskonačno konvergirajući niz nekih numeričkih vrijednosti ili (d) kao beskrajno repetitivna ili rekurzivna operacija ove ili one vrste. Sve se to obično smatra 'potencijalnim' beskonačnostima. Ali u matematici se često drži za svrsishodno – neki tvrde da je neizbježno – pretpostaviti da takve beskonačnosti, u idealnome smislu, mogu objektivno postojati kao cijeli skupovi, i to je pokrenulo jednu od najžešćih rasprava među matematičarima koja traje još i danas i ima malo izgleda da će se uskoro razriješiti na zadovoljstvo sviju. Moj je cilj ovdje razmotriti neke od glavnih problema s posebnim obzirom na pitanje 'matematičke istine'.

Rane korijene ovoga spora, u izvjesnome smislu, treba tražiti u pokušajima da se rasvijetli kompleksni odnos između kontinuiteta i diskretnosti, budući da je to bio izvor nekih dubokih antinomija koje su stajale na putu racionalnoga objašnjenja svijeta. U nastojanju da objasnimo što se događa u prostorno-vremenskome kontinuumu svi se mi neminovno oslanjamo na diskretne metode mjerenja. Ali kako je moguće adekvatno opisati pomoću neke diskretne 'metrike' nešto što se u našem iskustvu javlja kao kontinuirano? To je doista bilo pitanje koje je postavio još Zenon u svojim poznatim paradoksima. Ako se naime pretpostavi da su kontinuirane veličine beskonačno djeljive, te se sastoje od beskonačnih skupova određenih 'diskretnih' elemenata, onda je – primjećuje on – nemoguće objasniti mogućnost gibanja, doista mogućnost bilo kakve mijene. Strjelica nikad ne će doseći svoj cilj jer prije nego što prijeđe polovicu udaljenosti, morat će najprije stići do trećine, a prije toga do četvrtine i tako dalje u beskonačnost, pa dakle nikada ne će ni poletjeti. Na sličan način Ahil nikada ne će moći dostići kornjaču ako kornjača na početku utrke dobije prednost, bez obzira kako mala ta prednost bila. Doista, uzme li se da se vremenski i prostorni razmaci mogu načelno beskonačno dijeliti, niti jedno fizičko tijelo ne će moći proći bilo koji razmak u konačnome vremenu. Preostaje dakle samo jedan zaključak, naime da gibanje i mijena postoje samo u našoj *percepciji*, a ne u zbilji.

Zenon je u svojoj argumentaciji čini se ciljao na pitagorejski atomizam. Pitagorejci su, naime, tvrdili da su sve stvari sastavljene od izvjesnih nedjeljivih fiksnih jedinica (*atomoi*); odnosno da je svijet u biti zrnast. Suprotno tomu Zenonovi su paradoksi pokazali da je takva hipoteza nespojiva s pretpostavkom beskonačne djeljivosti konačnih veličina. Ako takve osnovne jedinice mjere više od nule, bez obzira kako malene one bile, tvrdio je Zenon, onda će sve veličine narasti do beskonačnosti, a ako bi se svodile na nulu, onda nijedna stvar ne bi uopće imala neku veličinu.

ii.

Standardna reakcija na Zenonove argumente je da ih se treba odbaciti, jer je matematički savršeno moguće da beskonačni niz brojeva daje konačan zbroj. Tako je jasno da beskonačni konvergentni niz 1/2 +1/4 +1/8 + … čiji članovi teže prema nuli ima konačni zbroj, naime jedan. U stvari individualni članovi svih konvergentnih nizova teže prema nuli, premda svi nizovi čiji članovi teže nuli ne daju konačni zbroj. Zenonovi nizovi međutim daju.

To nije valjan prigovor, iz dva razloga. Prvo, ako se počne s pretpostavkom da se prostorni interval može smatrati skupom točaka (što je, prisjetimo se, temeljna pretpostavka Zenonova argumenta), tada je gotovo neizbježno da se upada u poteškoće kad se pokušava objasniti kontinuirano gibanje. Jer kako je Zenon odmah upozorio, strjelica je, u bilo kojem trenutku duž svoje pretpostavljene putanje, točno tamo gdje jest i nije lako objasniti kako ona može prijeći od jedne do druge točke. Stvar je u tome da čim je kontinuirani interval sveden na skup diskretnih elemenata, onda više nije moguće odrediti je li tijelo u točki B zapravo *isto ono tijelo* koje je napustilo točku A. Ali kako onda objasniti mogućnost gibanja? Gibanje pretpostavlja kontinuitet – ali kako *matematički* objasniti kontinuitet?

Poznati odgovor na to je da se u konačnici sve svodi na jednostavno pitanje postoji li matematički analog (analogni model) neprekinutoga intervala, odnosno intervala 'bez praznina', i odgovor je dakako da postoji – to je naime *skup svih realnih brojeva*! Matematički govoreći, tu se naprosto radi o gustome kompaktnom skupu u kojem između svaka dva realna broja ima beskonačno mnogo drugih realnih brojeva. Treba, međutim, imati na umu da je matematički kontinuum, odnosno skup svih realnih brojeva, logička tvorevina koja nema fizičku protežnost. Štoviše, ona ne daje odgovor na to kako tijelo uspijeva doći od A do B.

Drugo, prigovor da beskonačno konvergentni nizovi brojeva mogu ipak dati konačni zbroj pokazuje nerazumijevanje Zenonova argumenta jer pretpostavlja da se takvi nizovi mogu tretirati kao da postoje u cjelini, dok je Zenon govorio u smislu beskonačnih nizova *diskretnih koraka* ili *zadataka* koji po definiciji ne mogu biti dovršeni u konačnome vremenu. Doista, njegova je teza, kako smo vidjeli, da ako se nešto što se u našoj predodžbi javlja kao kontinuirano – naime prostorno-vremenski razmak – tretira kao beskonačni skup diskretnih točaka, onda uopće nije moguće pružiti racionalno objašnjenje gibanja.

Sve to neminovno pokreće pitanje u kojoj mjeri i na koji način matematički modeli doista 'odražavaju' realni svijet? Kako je moguće – je li uopće moguće – perceptualni kontinuitet precizno modelirati pomoću beskonačnih skupova izvjesnih diskretnih jedinica? Može li se racionalno pretpostaviti da beskonačni nizovi brojeva, ili predmeta bilo koje vrste, ikada objektivno postoje kao potpune cjeline? Ono što Zenonovi paradoksi izgleda pokazuju jest da odgovor na to mora biti negativan.

iii.

Netko će ovdje bez sumnje prigovoriti da vrijeme, posebno *doživljeno* vrijeme, tako i tako ne podliježe Zenonovu tipu analize. Razglabanje o beskonačnim nizovima, reći će se, temelji se isključivo na logici i nema nikakve veze s vremenom.

Odgovor na to jest da je Zenona u prvome redu zaokupljala mogućnost matematičkoga objašnjenja gibanja i mijene, a tu je vrijeme bitan čimbenik i ne može se izostaviti iz razmatranja. Ono što je važno i što je za nas posebno zanimljivo jest da se problem matematičkoga objašnjenja gibanja i mijene, te s tim u vezi problem u kojoj mjeri matematika može pružiti adekvatnu sliku svijeta, nametnuo ljudskomu umu kao izravna posljedica otkrića *iracionalnih brojeva*.

Razmotrimo Pitagorinu poziciju. 'Sve je broj', tvrdio je Pitagora – pri čemu je mislio da se bit svega što se zbiva u svijetu može točno matematički opisati. On je čini se to svoje uvjerenje izvukao iz glazbe, vjerujući da, kao u glazbi, sveukupni pojavni svijet mora imati karakter nekoga temeljnog sklada, zasnovanoga na racionalnim razlomcima koji se sastoje isključivo od cijelih brojeva. Tako npr. žica koja titra na glazbalu proizvodi zvuk koji zvuči u skladu sa zvukovima žica od jedne polovice, dvije trećine ili tri četvrtine duljine. Samo specifični *omjeri* (cijelih brojeva) izgleda proizvode milozvučje. To je za Pitagoru bio važan ključ. Jer, zar ljudski razum ne traži skladna objašnjenja prirodnih pojava? Ali ako razum i sklad idu zajedno, onda je zasigurno da ono što se ne može izraziti pomoću 'racionalnih' razlomaka cijelih brojeva mora biti 'iracionalno' (*alogos*) – i može proizići samo iz neznanja ili nekoga slučajnog previda.

Lako je dakle zamisliti koliki je šok bio za Pitagoru i njegove sljedbenike kad su otkrili da postoje logički nesumjerljive veličine čiji se odnosi ne dadu izraziti pomoću racionalnih razlomaka. Doista takvi se odnosi izgleda mogu matematički izraziti tek beskonačnim neperiodičnim decimalnim brojevima, i Pitagora i njegovi sljedbenici naprosto nisu mogli prihvatiti takve beskonačnosti. Predaja govori o nekome Hippasusu od Metaponta koji je tijekom nekoga pomorskog putovanja priopćio svojim pitagorejskim suputnicima da je otkrio da je kvantitativni odnos između stranice kvadrata i dijagonale 'iracionalan'. Oni su se toliko razjarili da su ga bacili u more, i siromah se utopio. Ili se sve veličine – tvrdili su oni – sastoje od nekih temeljnih nedjeljivih jedinica čiji se odnosi mogu izraziti razlomcima cijelih brojeva ili uopće ništa nije *racionalno objašnjivo*.

Glavna iritacija i stalni uzrok sporenja postalo je tako pitanje egzistencije beskonačnosti. Može li se bilo koji beskonačni niz racionalno tretirati kao objektivno postojeća cjelina? Za razliku od odnosa među sumjerljivim veličinama, koji se mogu izraziti pomoću racionalnih razlomaka, ili periodičnim decimalnim brojevima koji završavaju istim znamenkama, odnosi među 'nesumjerljivim' veličinama, naprotiv, mogu se izraziti samo pomoću ne-periodičnih decimalnih brojeva s nepredvidivim beskonačnim proširenjem. Tako se na primjer drugi korijen iz dva svodi na baš takav ne-periodični beskonačni decimalni broj (1,414213562…). Ali ako je tako, kako se onda može drugi korijen iz dva racionalno tretirati kao autentični *individualni* broj, a da se pri tome istodobno ne prihvati postojanje odgovarajućega beskonačnog decimalnog broja kao potpune cjeline?

Pitagorejci su tvrdili da to nije moguće, i Zenonovi paradoksi su im izgleda davali za pravo. Pretpostavka egzistencije takvih beskonačnosti stvara nesavladiva protuslovlja. To je imalo dalekosežne posljedice, jer su stari grčki matematičari, koji su tražili sklad, okrenuli leđa algebri i usredotočili se uglavnom na geometriju, koja je – tako je izgledalo – bila mnogo više u skladu s njihovim duboko uvriježenim uvjerenjima o 'matematičkoj harmoniji' u prirodi.

iv.

Vjerovanje starih Grka da je matematika – što je uglavnom značilo euklidsku geometriju – 'ugrađena' u svijet i da se naprosto radi o 'otkrivanju' matematičkih istina koje postoje oduvijek, održalo se kao standardna hipoteza kroz još mnogo sljedećih stoljeća, iako je seizmički šok otkrića 'nesumjerljivih veličina' doveo u pitanje takav stav. Za Platona je, kao što je poznato, matematika bila izvor vječnih istina i najpouzdaniji vodič prema onome što postoji u *bitnome* smislu. To gledište, zapravo, nikada nije posve iščezlo, i često se i dandanas kaže da su matematičari po uvjerenju obično potiho 'platonisti', premda se u praksi redovito strogo pridržavaju 'algoritamskih' ili 'konstruktivističkih' metoda dokazivanja – osim, dakako, što za razliku od svojih antičkih predšasnika uključuju teoreme algebre i analize u svoj 'platonski' svemir.

Što se pak fizičara tiče, oni više ili manje automatski pretpostavljaju da se zakoni prirode dadu precizno matematički izraziti. U tome oni slijede pionire matematičke fizike poput Galileja, koji je bio čvrsto uvjeren da je svemir 'napisan jezikom matematike'. U Galilejevo je doba to uključivalo euklidsku geometriju, i Kepler se posebice obilato koristio euklidskim ilustracijama u svome objašnjenju nebeskih pojava. Poput Pitagore, Kepler je tražio 'matematički sklad' u prirodi i bio je silno potresen kad je ustanovio da su staze planeta eliptične, a ne kružne. Laknulo mu je tek kad je otkrio da radijusi staza planeta u jednakim vremenima opisuju jednake površine (njegov 'drugi' zakon), što je – tako mu se činilo – potvrdilo postojanje sklada u koji je vjerovao.

Ali, naravno, beskonačnost je predstavljala daleko najveći izvor problema u matematičkome opisu prirode. Bilo je jasno da je, usprkos grčkim rezervama, trebalo naći neki način da se iracionalni brojevi uključe u brojevni sustav, premda nije bilo jasno kako to postići, a da se ne pretpostavi postojanje beskonačnih skupova. U modernoj se matematici iracionalni brojevi normalno definiraju pomoću limesa, odnosno graničnih vrijednosti, nizova racionalnih brojeva, točnije pomoću takozvanih 'Cauchyjevih nizova' ili pomoću 'Dedekindovih rezova' na brojevnome pravcu (racionalnih brojeva). 'Cauchyjev niz' beskonačan je niz vrijednosti u kojima apsolutna razlika između susljednih članova niza teži nuli dok niz ide u beskonačnost. 'Dedekindov rez' (nazvan po njemačkome matematičaru koji je prvi uveo taj izraz) definira iracionalni broj pomoću dvaju skupova racionalnih brojeva od kojih jedan obuhvaća sve racionalne brojeve koji su manji od iracionalnoga broja o kojem se radi, a drugi skup uključuje sve one (racionalne brojeve) koji su veći. Tako je $\sqrt{2}$ definiran kao

$$[\{a/b : a^2/b^2 < 2\}, \{a/b : a^2/b^2 > 2\}]$$

Treba upozoriti da je ideja konvergentnih nizova (naime nizova koji teže prema nekom *limesu*) prisutna u obje definicije. Međutim, Dedekindova definicija posebice, čini se, implicitno pretpostavlja beskonačne skupove kao *aktualno postojeće,* ne tek kao 'potencijalne' beskonačnosti, a to, kao što ćemo vidjeti, vraća u središte pozornosti iste one probleme koje je Zenon prvi istaknuo i koji, unatoč uvijek novim pokušajima da ih se svlada, još uvijek čekaju zadovoljavajuće rješenje.

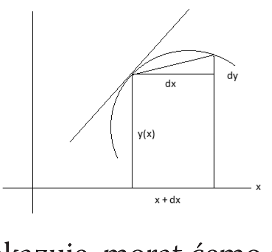
V.

Pa ipak, Dedekind možda nije imao drugoga izbora. Beskonačnost na ovaj ili onaj način stalno ulazi u matematički prostor. Što se toga tiče, sam bi *infinitezimalni račun* bilo teško razumjeti bez pretpostavke beskonačne djeljivosti. Već sam rekao da je Kepler iz onda dostupnih podataka izveo zaključak da su staze planeta eliptične. Newton je objasnio *zašto* su eliptične, ali je trebao egzaktnu metodu za izračun njihovih staza i brzinu kretanja, i to je bilo ono što ga je dovelo do otkrića *infinitezimalnoga računa*. Rezultat je bio taj da se beskonačnost opet našla u središtu pozornosti znanstvenika.

Razmotrimo kako je do toga došlo. Da bi se ustanovili smjer gibanja i brzina kojom se tijelo giba, mora biti moguće izračunati nagib tangente – ili *kut zakrivljenosti* – u bilo kojoj točki njegove staze. Kako to postići? Obično kada pokušavamo izračunati brzinu tijela koje se giba, odabiremo dvije točke na njegovoj stazi i udaljenost podijelimo s vremenom potrebnim da je tijelo prijeđe, tj.

$$\frac{s}{t}$$

Ali to nam daje samo *prosječnu* brzinu na dotičnoj udaljenosti i ne pruža potpunu sliku o tome što se zapravo događa tijekom prevaljenoga razmaka. Tako npr. tijelo koje se kreće od *a* do *b* može slijediti bilo koju od bezbroj staza, i mijenjati brzinu dok se kreće. Ako trebamo izračunati njegovu putanju s dovoljnom preciznošću, trebamo informaciju o njegovu *smjeru kretanja* i njegovoj *brzini* u bilo kojoj točki njegove staze. Govoreći matematički to znači odrediti točan nagib tangente u bilo kojoj točki krivulje kretanja.



Kao što gornji grafikon pokazuje, morat ćemo se opet koristiti formulom s/t, osim što ćemo sad morati uzeti da su *s* i *t* beskonačno mali – što je gore označeno kao *dy* i *dx* – ukratko toliko blizu nuli koliko se može zamisliti, a da ne postanu nula. Izraženo u Leibnizovoj notaciji, formula s/t prema tome postaje:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{y(x+dx)-y(x)}{dx}$$

što je definicija 'diferencijala', ili ono što je Leibniz nazvao 'omjerom (ratio) infinitezimala'; on je naime *dy* i *dx* smatrao 'infinitezimalnim veličinama' koje, iako nisu nule, ipak nemaju neku određenu vrijednost. Newton, koji je prije njega neovisno došao na istu ideju, govorio je o 'fluentima' i 'fluksijama', koji se, kao što njihova imena sugeriraju, približavaju nekoj graničnoj vrijednosti, ali je nikad ne dostižu.

Ne iznenađuje dakle da su Newtonovi *fluenti* (*dy*, *dx*) i *fluxioni* (dy/dx), kao i Leibnizovi 'infinitesimali' odmah navukli na sebe oštru filozofsku kritiku. U kojem se naime smislu može reći da takvi 'fluenti', 'fluksije' ili 'infinitezimali' doista postoje? Leibniz ih je nazvao 'idealnim entitetima', dok je istodobno tvrdio da nemaju neku određenu vrijednost. Newtonova vlastita terminologija nije bila manje dvosmislena. I upravo je to bilo srž problema. Newtonovi 'fluenti/tijekovi' (u Leibnizovoj notaciji *dy* i *dx*), kao što je biskup Berkeley, Newtonov glavni kritičar, oštro prigovorio, morali bi biti ili nula ili veći od nule, i u oba slučaja se čovjek nalazi u nedoumici. Ako su veći od nule, onda se mogu dalje dijeliti; a ako su nula, onda se može i bez njih. Što se pak tiče 'fluksija', tj. omjera iščezavajućih 'fluenta/tijekova', oni su nekako još i više izmigoljivi i Berkeley ih prezirno odbacuje kao ništa drugo doli 'utvare iščezavajućih veličina'.

Ipak, i Newton i Leibniz su očito mislili da te 'utvare iščezavajućih veličina' nisu samo korisne, nego dapače neizostavne za izračunavanje vrijednosti funkcija koje opisuju staze određenih krivulja, iako se slažu da se one mogu izostaviti iz konačnoga rezultata. „Korisno je" – kaže Leibniz – „zamisliti beskrajno malene vrijednosti čiji omjer nije jednak nuli, ali koje se ipak mogu zanemariti kada god se javljaju u društvu s neusporedivo većim vrijednostima".

Rasprava o 'infinitezimalima' se međutim nastavljala s nesmanjenom žestinom, dok matematičari najposlije nisu prihvatili da je prikladnije izraziti Newtonove i Leibnizove uvide o diferencijalima jezikom 'limesa', odnosno 'graničnih vrijednosti'. Suvremeni pojam *limesa* potječe od Karla Weierstrassa, koji je iznašao bolju definiciju 'brzine u određenoj točki' – tj. definiciju 'brzine/stope promjene' i smjera gibanja – uzimajući isključivo u obzir odnose između nekih *konačnih* vrijednosti. Radi se naime o tome da se *brzina* tijela koje se giba u točki p (pomalo zbunjujuće tehnički etiketirana kao 'trenutačna brzina') i njegov smjer kretanja, izraze u smislu približavanja sukcesivnih razlomaka *dy/dx* nekomu određenom *limesu* kada njihova vrijednost pada ispod bilo kojega pozitivnog broja ε za svaki *dx* koji je manji od nekoga drugog pozitivnog broja δ (ovisno od ε). To je Weierstrassova glasovita *epsilon-delta* definicija. Primijetimo da ta definicija izbjegava svaki spomen beskonačnosti i 'limes' definira u potpunosti pomoću konačnih brojeva. Formalno izraženo:

$\frac{dy}{dx} \rightarrow L$ u točki p ako za bilo koji pozitivni broj $\varepsilon > 0$
postoji neki drugi pozitivni broj $\delta > 0$ tako da je
$|f(x) - L| < \varepsilon$ za svaki x kad je $|x - p| < \delta$

vi.

Rješava li to problem? Prednost je gornje definicije, matematički govoreći, svakako što nas oslobađa dvosmislenoga pojma infinitezimala. Nema više ni spomena o Newtonovim 'fluentima' ili Leibnizovoj koncepciji 'beskrajno malih veličina'. Stopa promjene u nekoj određenoj točki sada se objašnjava pomoću pojma *limesa*, time da je sam *limes* definiran na osnovi odnosa između dviju pozitivnih veličina, *epsilon* i *delta*; premda ideja realnoga broja 'manjeg od bilo kojeg drugog pozitivnog realnog broja', čini se, ostaje implicitna pretpostavka. Bilo kako bilo, gornja definicija u izvjesnome smislu reducira pojam neprekinute funkcije na izvjesne numeričke odnose i utoliko ukoliko ostavlja kvalitativne aspekte neprekinutosti po strani moglo bi se – s filozofske točke gledišta – reći da je nepotpuna. Međutim to samo naglašava činjenicu da su matematičke formule *sui generis* i da čovjek ne smije uzeti da one doslovce pružaju metafizički opis prirode, iako mogu korisno poslužiti u istraživanju prirodnih pojava i prognoziranju tijeka događaja u danim okolnostima.

Ukratko, matematika iznalazi modele pomoću kojih se neka određena prirodna stanja mogu prikladnije protumačiti, kako bi se postigla što bolja predviđanja. U tome je smislu poučno prisjetiti se razvoja moderne geometrije. Euklidska je geometrija stoljećima bila jedini *racionalni* nacrt za opis svijeta. Čak je i Kant dijelio to gledište. Pokazalo se, međutim, da je euklidska geometrija samo jedan od mogućih modela, od kojih svi, da se tako kaže, imaju jednako pravo na 'racionalnost'. Zanimljivo je primijetiti da se sam Euklid nije upuštao ni u kakve izričite metafizičke pretpostavke u pogledu svojih aksioma. On ih je naprosto zvao *notiones communes*, naime opće (valjda je mislio 'zdravorazumske') ideje. Njima je također dodao jedno načelo koje je poslije bilo uzeto kao aksiom, a točnije bi ga bilo nazvati postulat, *paralela*. To, po mome mišljenju, nije učinio stoga jer je bio uvjeren da taj postulat apsolutno vrijedi za fizički svijet, već zato što bez njega nije mogao dokazati ključne teoreme o geometrijskim likovima kao što su kvadrati i trokuti, koji su služili kao osnovni predložci za racionalni opis svijeta. Tek je nakon pojave konzistentnih ne-euklidskih geometrija postalo očito da nekad duboko ukorijenjeno gledište da euklidski 'aksiomi' i teoremi izražavaju 'pravu' prirodu zbilje, više nije neodrživo.

vii.

Ukratko matematika kreira apstraktne modele koji u danim okolnostima mogu, ali ne moraju dati uspješne rezultate. Infinitezimalni je račun izumljen kao koristan matematički instrument za rješavanje pojava tijela u gibanju. Ideja lokomocije, odnosno promjene mjesta, taj najjednostavniji oblik mijene, kao što je pokazao Zenon, neodvojiva je od ideje kontinuiteta, a kontinuitet nosi sa sobom problem beskonačnosti. Kako dakle shvatiti tu beskonačnost? Postoji li doista beskonačnost i u kojem smislu? Kako se ideja beskonačnosti može uklopiti u racionalni opis svijeta? Je li prostor-vrijeme kontinuirano, ili je diskretno? A ako je diskretno, kako se može objasniti mogućnost pomicanja iz jedne prostorno-vremenske točke u drugu prostorno-vremensku točku?

Matematički modeli stvoreni radi rješavanja takvih pitanja neizbježno uključuju pretpostavku objektivnosti. Njima je cilj dati objektivni prikaz onoga što doista jest. Ali postavlja se pitanje, što objektivno postoji? Kako utvrditi što je objektivno, a što nije? Ta su pitanja dio zenonskoga nasljeđa i ništa ne gube na aktualnosti. Newton je, kao što je poznato, pretpostavljao da postoji apsolutno univerzalno vrijeme koje 'ravnomjerno teče bez obzira na bilo što izvanjsko'. To je podrazumijevalo mogućnost da se izvjesni događaji mogu objektivno i neovisno o promatranju zbiti točno u isto vrijeme. Nasuprot tomu, ključna je teza Einsteinove 'specijalne teorije relativnosti' da vrijeme teče različito za različite promatrače, i da ne može postojati absolutna istodobnost. Međutim, bilo bi prenaglo reći da nas to dovodi do bližega razumijevanja fenomena vremena. Primijetimo da odbacivanjem apsolutne istodobnosti specijalna teorija relativnosti indirektno pokreće pitanje objektivnosti *mijene*. Kao što je istaknuo Kurt Gödel, ako nije moguće smisleno reći da se dva događaja odvijaju u isto vrijeme u objektivnome smislu (to jest, neovisno o promatraču), također nije moguće smisleno tvrditi da se događaji objektivno zbivaju jedan iza drugoga. Čini se dakle da odbacivanjem mogućnosti objektivne istodobnosti, kao što primjećuje Gödel, Einsteinova teorija implicitno dopušta ono što eksplicitno osporava, naime mogućnost 'blok svemira' u kojem uopće nema vremena.

Razlog zašto su pitagorejci ustuknuli od straha kad su otkrili iracionalne brojeve, bio je upravo to što su čvrsto vjerovali da matematika mora i može dati vjeran opis zbilje, a ne samo stvarati apstraktne interpretativne modele koji bi nam omogućili bolje shvaćanje onoga što se događa u svijetu našega iskustva.[1]

viii.

U suvremenoj je matematičkoj teoriji mnogo truda posvećeno čišćenju matematike od paradoksa i zabluda koje proizlaze iz 'metafizičkih predrasuda' klasične matematike. Što se tiče posebno *infinitezimalnoga računa*, jezik je 'infinitezimala', kako smo vidjeli, zamijenjen jezikom 'limesa', a ideja aktualno postojećih beskonačnosti sve se više prilagođava 'finitističkim' metodama konstrukcije.

S jednim važnim izuzetkom. Georg Cantor, utemeljitelj teorije skupova, notorno je odbio dati se zastrašiti od svojih 'finitističkih' kritičara i prigrlio je u cijelosti ideju aktualno postojećih beskonačnosti.

1 „Matematičarima je trebalo dugo vremena da uvide da su brojevi umjetni izumi ljudskih bića; istina vrlo imaginativni izumi za opis mnogih aspekata prirode, ali nimalo više *dio* prirode od Euklidovih trokuta ili pak formula u infinitezimalnom računu. Povijesno gledano, matematičari se po prvi put počinju suočavati s tim filozofskim pitanjem kada počinju uviđati da su imaginarni brojevi neizbježni, korisni i na izvjestan način jednaki po statusu bolje poznatim realnim brojevima." Ian Stewart, *Taming the Infinite: The Story of Mathematics*, Quercus Publishing, 2008., str. 182.

Što ga je nagnalo da usvoji tako radikalno stajalište? Razmotrimo definiciju beskonačnoga skupa. Prema Dedekindu, skup je 'beskonačan' ako se može dovesti u korespondenciju 'jedan-naprama-jedan' sa skupom prirodnih brojeva. Preciznija definicija, koju također dugujemo Dedekindu, kaže da je skup beskonačan ako ga se može dovesti u korespondenciju 'jedan-naprama-jedan' sa svojim 'pravim podskupom' – pri čemu 'pravi podskup' predstavlja skup koji premda 'ko-ekstenzivan' (isto-opsegovan) s izvornim skupom ipak isključuje neke njegove elemente. Tako npr. skup prim-brojeva predstavlja 'pravi podskup' skupa *cijelih* brojeva, te je istodobno 'koekstenzivan' s njime. Očito može postojati beskonačan broj takvih podskupova i ako se svaki od njih može dovesti u korespondenciju 'jedan-naprama-jedan' sa skupom cijelih brojeva svi su oni, prema Cantoru, *isto-opsegovni* i pripada im *isti kardinalni broj*. Cantor je tu njihovu 'kardinalnost' ili 'moć' označio prvim slovom hebrejske abecede א (*Alef*). Međutim, to je, kao što ćemo vidjeti, za Cantora bio tek prvi (nazvan *'Alef nula'* – $\aleph_0$) od takozvanih 'transfinitnih kardinalnih brojeva', te dakle najniži u beskonačnoj hijerarhiji 'aktualno postojećih' beskonačnosti.

Vratit ću se na to malo kasnije. Na ovome je mjestu korisno primijetiti da je Galilei, koji je i sam bio svjestan paradoksalnih svojstava beskonačnih skupova, posebice činjenice da su oni 'isto-opsegovni' sa svojim pravim podskupovima, izvukao iz toga dijametralno suprotan zaključak. Galilejev poznati primjer skup je cijelih brojeva koji stoji u odnosu jedan-naprama-jedan sa skupom svojih kvadrata. Međutim, za razliku od Cantora, koji je tvrdio da zbog toga takve skupove treba tretirati kao da imaju isti (beskonačni) kardinalni broj, Galilei je zaključio da se „svojstva biti jednak, veći ili manji od nekog drugog broja, ne mogu pripisati beskonačnim, već samo konačnim veličinama". Drugim riječima, ne može biti govora o egzistenciji beskonačnih brojeva!

Bez obzira na to je li ili nije znao za ovaj Galilejev sud, Cantor je u svakome slučaju uporno nastavio izgrađivati svoj transfinitni svemir, ignorirajući uznemirujuće implikacije vlastitoga pristupa. 'Transfinitni kardinalni brojevi', tvrdio je on, ne podliježu pravilima obične aritmetike. Tako, na primjer, dodavanje broja 1 (ili bilo kojega drugog racionalnog broja) $\aleph$-u ne mijenja ni na koji način njegovu 'kardinalnost' ili 'potenciju'. Ali ako je to tako, tj. ako $\aleph + 1 = \aleph$, tada, nakon prebacivanja alefa s lijeva na desno (uz promjenu predznaka), dobivamo paradoksni rezultat $1 = 0$.

Postoje i druge čudnovatnosti 'transfinitne' aritmetike. Tako je npr. $\aleph_0 + \aleph_0$ također jednako $\aleph_0$; a isto vrijedi i za $\aleph_0 \times \aleph_0$. Međutim, Cantor je otkrio dokaz za koji je vjerovao da u potpunosti opravdava njegovu teoriju 'transfinitnih brojeva'. To se općenito zove 'Cantorov dijagonalni dokaz' ili 'dijagonalni postupak' i uključuje uzastopnu izmjenu jedne znamenke u svakome od decimalnih brojeva na listi od nule do jedan (svi realni brojevi mogu se prikazati kao decimalni brojevi) na mjestu koje brojčano odgovara položaju odgovarajućega decimalnog mjesta na listi, tj.

1. $0.\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots\ldots a_n \ldots$
2. $0.\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \ldots\ldots b_n \ldots$
3. $0.\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4 \ldots\ldots c_n \ldots$
4. $0.\ d_1\ d_2\ d_3\ d_4 \ldots\ldots d_n \ldots$

....

....

Zamjenom znamenaka duž dijagonale (u gornjem popisu: a_1, b_2, c_3, d_4 ...) s nekim drugim brojem dobivamo novi decimalni broj koji se ne pojavljuje nigdje na popisu. Ova činjenica sama po sebi, tvrdi Cantor, definitivno pokazuje da moraju postojati redovi beskonačnosti koji su veći od skupa cijelih brojeva.

Koristeći ovaj svoj dokaz, Cantor je također pokazao da će broj podskupova nekoga (za)danog skupa uvijek biti *veći* od samoga tog skupa. Dakle, ako skup ima *n* članova, broj njegovih podskupova uvijek će biti 2^n. To ostaje važeće čak i ako je *n* beskonačan, što znači da će u takvu slučaju nužno pripasti višem redu beskonačnosti. Drugim riječima, skup svih njegovih podskupova (te dakle njegov kardinalni broj) bit će nužno veći od *Alef nula*.

Teško je argumentirati protiv 'dijagonalnoga' dokaza – on je gotovo općenito prihvaćen kao logički solidan – pa ipak se javljaju neka pitanja. Prvo, taj dokaz pretpostavlja da je pojam beskonačnoga skupa potpuno jasan i nedvosmislen, što je u najmanju ruku upitno. Cantor, naime, polazi od premise da postoji tzv. 'brojljiva' beskonačnost jednaka *Alefu nuli*, i služi se 'dijagonalnim postupkom' da bi dokazao kako je moguće konstruirati skup koji nadilazi *Alef nulu*. Ali postavlja se pitanje što uopće opravdava pretpostavku egzistencije beskonačnih skupova? Sve što se može razumno tvrditi je to da ako se pođe od neke konačne liste *neodređeno* dugih brojevnih skupova, dijagonalni se skup već po samoj definiciji ne će nalaziti na listi. To, međutim, samo po sebi ne opravdava pretpostavku egzistencije različitih stupnjeva beskonačnosti.

Drugi je razlog za dvojbu o zaključcima koje Cantor izvodi iz svoga 'dijagonalnog postupka' jedan drugi važan dokaz, naime dokaz 'neovisnosti' takozvane 'hipoteze kontinuuma'. Budući da je zaključio da moraju postojati 'transfinitni' brojevi, tj. brojevi veći od skupa cijelih brojeva, problem s kojim se Cantor suočio bio je kako utvrditi njihov poredak. Ako je skup svih racionalnih brojeva *Alef nula*, postavlja se pitanje koji kardinalni broj pripada matematičkomu kontinuumu *c*? Očito je da *c* mora uključiti sve moguće podskupove skupa cijelih brojeva. Drugim riječima, on mora biti $2^{\aleph_0}$. Ali koje mjesto $2^{\aleph_0}$ točno zauzima u nizu transfinitnih kardinala? Jasno je da on mora biti veći od *Alef nula*, ali točno koliko veći? Cantor je pretpostavio da je to zapravo susljedni, odnosno sljedeći *veći* transfinitni kardinalni broj, naime

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

To je poznato kao njegova 'hipoteza kontinuuma'. Cantor je bio uvjeren da je ta hipoteza istinita, ali je nije mogao dokazati. Prisjetimo se da je on svoje transfinitne brojeve smatrao objektivno postojećim cjelinama, tako da je hipoteza *morala* biti ili istinita ili neistinita. Međutim, kao što se pokazalo u novije vrijeme, to naprosto nije slučaj. S obzirom na standardne ('Zermelo-Fraenkel') aksiome teorije skupova, Cantorova hipoteza, premda nije u suprotnosti s takvim aksiomima, logički je ipak *neovisna* o njima. Drugim riječima, njezina je istinitost ili neistinitost, u izvjesnome smislu, stvar izbora.

To ima dalekosežne posljedice, jer pokazuje da se beskonačni skupovi ne mogu tretirati, kao što je Cantor vjerovao, kao metafizički objekti koji postoje objektivno kao potpune cjeline i da se matematička istina odnosno neistina mogu smisleno pripisivati samo propozicijama o onome što se u načelu može utvrditi finitističkim algoritamskim metodama. Nadalje to također znači da vjerojatno nikada ne ćemo biti u stanju sa sigurnošću reći koliko je tzv. skup kontinuuma – skup *c* – stvarno velik.

Cantor je, međutim, nepopustivo ostao pri svome, gradeći svoju kulu babilonsku i postulirajući cijeli niz 'aktualnih' beskonačnosti, s obrazloženjem da bez obzira na to koliko je skup velik, broj će njegovih podskupova uvijek biti veći. On je u to vrijeme već bio dobrano zakoračio prema misticizmu Kabale, govoreći nebulozno o nekom 'Apsolutu', ili 'Apsolutnome', koje navodno obuhvaća sve beskonačnosti, ali koje se – kaže on – ipak ne smije shvatiti kao neki *genus supremum*, odnosno 'najviši rod', aktualnih beskonačnosti. Ukratko *Apsolutno* 'nadilazi sve što je konačno i transfinitno' i ne smije ga se shvatiti kao neku vrstu 'entiteta'. Istovremeno, tvrdi Cantor, *Apsolutno* predstavlja 'jedno jedino savršeno individualno jedinstvo u kojemu je sve uključeno …' Nije, međutim, nipošto jasno kako sjediniti te dvije odlike, a nije, čini se, bilo jasno ni samom Cantoru, jer, kao što on sam na kraju priznaje, *Apsolutno* je 'neshvatljivo ljudskom razumu'.[2]

U stvari, ovdje se već počinje lomiti pojam beskonačnoga skupa kao objektivno postojeće cjeline. Jer, ako počnemo s pretpostavkom da se svaka nakupina stvari kvalificira kao skup, onda je skup *svih* skupova također skup, a takav pojam odmah postaje žrtvom Russellova poznatog paradoksa. Javlja se naime pitanje, je li takav skup član samoga sebe ili nije, i obje hipoteze dovode do kontradikcije. Drugim riječima, skup svih skupova ne može se dosljedno zamisliti kao još jedan novi skup. Izraženo brojevima, skup svih kardinalnih brojeva nije i sam kardinalni broj. Ukratko, ne može postojati tako nešto kao 'najveći' kardinalni broj.

Ono što je začudno jest da je Cantor, čini se, bio i sam svjestan toga, pa ipak je – možda upravo zbog svojih mističnih sklonosti – uporno ustrajao na svojem stajalištu. Ono što je od presudne važnosti, a propustio je uvažiti jest da ako se svemir sastoji od beskonačnoga broja stvari onda ga se – kao što proizlazi iz Russellova paradoksa – ne može racionalno tretirati kao individualni entitet; vrijedi također obrnuto, ako svemir (sve što postoji) doista predstavlja jedan jedinstveni homogeni entitet, onda ga se ne može racionalno tretirati kao da se doslovce svodi na beskonačno mnoštvo različitih stvari.

2 Citati su uzeti iz Cantorove korespondencije s engleskom matematičarkom Grace Chishom Young. Vidi Amir D. Aczel, *The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity*, Simon and Schuster, 2000., str. 188. – 189.

U izvjesnome smislu tu dolazimo do same granice onoga što se može čisto matematički izraziti. Leopold Kronecker, Cantorov najoštriji kritičar, primijetio je, po mome mišljenju s opravdanjem, da ono što Cantor radi možda spada u područje 'filozofije ili teologije, ali zasigurno nije matematika'. Matematika se – tvrdio je Kronecker – mora ograničiti samo na 'finitističke', ili kao što je kasnije postalo opće poznato pod imenom 'konstruktivističke', metode dokazivanja i držati se daleko od tzv. 'aktualnih beskonačnosti'. Veliki Gauss, kao što je poznato, dijelio je to isto stajalište. „Prosvjedujem" – kaže on – „protiv upotrebe beskonačne veličine kao nečega cjelovitog; u matematici to nikada nije dopušteno. Beskonačnost je samo *façon de parler*, i sve se zapravo svodi na *limes* kojemu se vrijednosti izvjesnih razlomaka približavaju beskonačno blizu, dok druge mogu rasti bez ograničenja."

IX.

'Konstruktivisti' se u matematici u tome nesumljivo slažu s Gaussom, te se radikalno suprotstavljaju 'klasičnomu' ili 'platonističkomu' gledištu s obzirom na matematički dokaz. 'Platonisti', uključujući Cantora, koji vjeruju da matematičke istine postoje u nekome objektivnom carstvu istina prije, i neovisno o njihovu 'otkriću', oslanjaju se na logičko načelo 'isključenoga trećeg' i pretpostavljaju da svaka sintaktički dobro formirana matematička propozicija mora biti ili istinita ili pogrješna. Štoviše, oni obično drže neku matematičku tvrdnju 'dokazanom' ako se može pokazati da je njezina negacija logički nespojiva s nekim osnovnim aksiomima za koje se pretpostavlja da su očigledni. To također uključuje propozicije o svojstvima beskonačnih skupova. Tako je npr. na 'platonističkim' pretpostavkama, savršeno smisleno reći da decimalno proširenje od broja *pi* (3,141592…) ili sadrži ili ne sadrži susljedni niz od devet devetki ili stotinu nula, ili bilo koje takvo neobično obilježje, bez obzira na to može li se to potvrditi stvarnim izračunom. Nasuprot tome, 'konstruktivisti' odbacuju metodu dokaza temeljenoga na načelu 'isključenoga trećeg' i priznaju samo algoritamske metode dokaza kao valjane.

Međutim, prije nego što kažem nešto više o tome, želim se kratko osvrnuti na jednu drugu, malo suzdržaniju, reakciju na probleme 'platonističke' matematike. Ovdje mislim na tzv. formalističku metamatematiku.

Formalistička koncepcija matematike potječe od Davida Hilberta, i cilj joj je, između ostaloga, zaobići metafizičke probleme koji se javljaju u teoriji skupova na taj način da matematičko rezoniranje protumači kao manipuliranje stanovitim simbolima prema određenim pravilima – poput igre šaha. Pitanje se interpretacije simbola ovdje namjerno ostavlja po strani. Na taj se naime način Hilbert nadao da će neizravno moći zaštititi rezultate postignute u teoriji skupova, a da istovremeno ne mora – da tako kažemo – 'prljati ruke' s njezinim paradoksima. Ako se matematika može tretirati kao 'neinterpretirana' igra s određenim simbolima, mislio je Hilbert, onda će biti moguće izbjeći logičke zamke 'kantorskoga' platonizma u teoriji skupa i istodobno spasiti ono što je u toj teoriji najvrjednije. Ukratko, matematika se može 'osloboditi' svojih metafizičkih paradoksa tako da se podigne na metamatematičku razinu i, počevši od nekih određenih aksioma odnosno aksiomskih *definicija*, izgradi inferencijani mehanizam pomoću kojega se može u svakome danom slučaju utvrditi je li neka sintaktički dobro skovana matematička formula matematički teorem ili nije.

Ovu je hipotezu, kao što je dobro poznato, zauvijek razorio Kurt Gödel, koji je dokazao da se ni za jedan formalizirani sustav, koji sadrži običnu aritmetiku cijelih brojeva, ne može ustvrditi da je i konzistentan i potpun. Gödel je iznašao postupak kojim je, korištenjem raspoloživih sredstava unutar takva sustava, moguće izraditi savršeno legitimne propozicije koje se formalno ne mogu dokazati *unutar* takva sustava, ali se ipak intuitivno može vidjeti da su istinite. Iz čega nužno slijedi da je sustav nepotpun. Zapravo, 'potpunost' se može postići samo uz cijenu nedosljednosti – a unutar nedosljednoga, odnosno nekonzistentnoga, sustava svašta je dakako moguće dokazati. Stoga je bilo malo nade da će Hilbertov projekt moći pružiti jedinstvenu i sigurnu aksiomatsku platformu za sveukupnu matematiku.

Ali premda je Hilbertov ambiciozni program aksiomatizacije matematike bio osuđen na propast, to nužno ne znači da 'formalistički' pristup treba sasvim odbaciti. Ono što se mora odbaciti jest iluzija da matematika daje ključ za opis 'metafizičke strukture' stvarnosti, umjesto da samo kreira modele koji u danim okolnostima mogu pružiti koristan uvid u to kako i zašto se stvari pojavljuju onako kako se pojavljuju u našem iskustvu.

X.

Sve je to potrebno imati na umu kad je riječ o matematičkoj beskonačnosti. Paradoksi su beskonačnosti nastali uglavnom iz pokušaja da se stvori neki diskretni model kontinuiteta. Ti su pokušaji bili vođeni pretpostavkom da se zbilja u biti sastoji od nekih određenih diskretnih elemenata – stajalište koje je, kao što smo vidjeli, zastupao Pitagora. Međutim, ako se prihvati takvo stajalište, onda, kao što je pokazao Zenon, nema mnogo izgleda da ćemo moći prevladati antinomije, koje se rađaju iz fundamentalne oprjeke između kontinuiteta i diskretnosti. Stvar je u tome da kontinuitet i diskretnost nisu i ne bi se smjeli tretirati kao 'naturalističke' metafizičke kategorije. Upravo obratno, one čine dio epistemičkoga kruga ideja na koje se oslanjamo da bismo mogli racionalno osmisliti ono što doživljavamo. Ozbiljne poteškoće iskrsavaju tek onda kada skrenemo u vode naturalističke metafizike.

Razmotrimo, kao ilustraciju, neke ideje vodilje Ruđera Boškovića, hrvatskoga znanstvenika i filozofa prirode iz 18. stoljeća, koji je u središtu svoje filozofije prirode stavio takozvani *lex continuitatis.* Stvarnost se u svojoj biti, tvrdi Bošković, sastoji od nekih neprotežnih 'točaka sila' čiji je učinak da se tijela međusobno privlače ili odbijaju, ovisno o tome povećava li se ili smanjuje razmak među njima. Sili gravitacije koja čestice vuče bliže jednu drugoj suprostavlja se odbojna sila koja ih tjera dalje jednu od druge i raste do beskonačnosti kad se razmak između njih približava nuli. Ono što začuđuje jest da iako su 'točke sila' zamišljene kao neprotežne, pojave privlačenja i odbijanja između čestica događaju se u predodžbenome, odnosno fenomenalnome kontinuumu, tj. unutar prostora i vremena, koji su, tvrdi Bošković, kontinuirane veličine.

To neizbježno odmah pokreće pitanje odnosa između kontinuiteta i diskretnosti. Treba istaknuti da se Boškovićev 'zakon kontinuiteta' odnosi samo na prostorno-vremenske pojave, s tim da prostor i vrijeme, po njemu, treba razumjeti kao *reales existendi modi*, čime on izgleda misli na načine na koji stvarni svijet *pojavno* postoji, a ne na obilježja *stvarnoga svijeta po sebi*. Stvarni svijet se, po njegovoj teoriji, sastoji od *neprotežnih*, dakle izvanpojavnih, ali diskretnih 'točaka sila'. To, čini se, ukazuje na jaz između načina na koji se svijet javlja u našoj predodžbi i načina na koji on u stvari jest. Usprkos tomu, Bošković izričito tvrdi da je ideju neprotežnih i diskretnih 'točaka sila' izvukao baš iz zakona kontinuiteta koji se, prema njegovoj vlastitoj teoriji, odnosi samo na pojavni prostor i pojavno vrijeme.

Kako to objasniti? Najvjerojatnije je objašnjenje da je Bošković počeo s pretpostavkom da kontinuitet, matematički govoreći, pretpostavlja beskonačnu djeljivost, i iz toga izvukao razumljiv zaključak da sastavni dijelovi prostornih i vremenskih intervala ne mogu biti protežne jedinice. Ali zašto bi to trebalo vrijediti za 'točke sila', koje on smatra temeljnim metafizičkim sastavnicama materijalnoga svijeta, ostaje otvoreno pitanje.

Međutim, ovdje nije mjesto ulaziti u pojedinosti Boškovićeve inventivne teorije prirode, osim što treba istaknuti da teorija prirode *nije isto* što i teorija zbilje, i da se pitanja kontinuiteta i diskretnosti ne mogu riješiti na zadovoljavajući način u okviru uskoga opsega prve teorije, i zahtijevaju detaljnu analizu unutar širega okvira ove potonje.

xi.

Zaključci koji proizlaze iz naše dosadašnje rasprave mogu se ukratko sažeti na sljedeći način.

Daleko od toga da matematika pruža metafizički opis zbilje, ona tek nudi idealne modele pomoću kojih se svijet može korisno tumačiti. Ako je to međutim tako, onda se matematičke propozicije, strogo govoreći, ne mogu označiti kao nužno istinite ili pogrješne. O njima se nasuprot tome može jedino reći da slijede ili ne slijede iz određenih početnih premisa (obično – i netočno – nazvanih 'aksiomima') i pitanje njihove istine ili neistine – ako se uopće javlja – iskrsava samo onda kad se one primjenjuju na specifične pojave unutar danoga empirijskog konteksta.

Izgleda, dakle, da bi na kraju ipak moglo biti neke koristi od 'formalističkoga' pristupa u matematici – barem u smislu konstrukcije idealnih modela. Jasno je, međutim, da se pojam istine ne može primijeniti na takvu djelatnost. Pitanje se istinitosti ili neistinitosti javlja samo onda kada se formalni modeli primjenjuju na ono što se uzima da predstavlja objektvo postojeću zbilju, u nastojanju da se riješe izvjesni praktički problemi. Što se pak ‘formalističkoga’ matematičara tiče, on je načelno obvezan odbiti upuštati se u bilo kakve metafizičke tvrdnje u odnosu na vlastite modele. On operira s određenim simbolima i mora se suzdržati od bilo kakvih sudova o bitku ili nebitku objekata i/ili situacija koje navodno ‘odgovaraju’ takvim simbolima. On se samo nada da će pomoću metamatematičkih metoda analize moći naći neki konzistentan formalni okvir matematičkoga diskursa koji, premda izbjegava svaku direktnu pretpostavku izvanlingvistične egzistencije matematičkih objekata, ipak dopušta mogućnost takve pretpostavke na razini ‘interpretacije’. Drugim riječima, govor o beskonačnim skupovima kao zapravo postojećim ‘cjelinama’ – pod uvjetom da se poduzmu određene mjere opreza – barem za formalista Hilbertova tipa, mogao bi se na kraju ipak dopustiti.

Po mome mišljenju to je nepotreban ustupak platonskomu senzibilitetu i ide suviše predaleko. Nema uvjerljivih argumenata koji bi se mogli izravno ili neizravno uporabiti u obranu ‘aktualno postojećih’ beskonačnosti. Činjenica je da se kantorovska (ili ‘platonistička’) teorija skupova ruši pod vlastitim teretom. Najbolji dokaz za to je, kao što smo vidjeli, Cantorova vlastita ‘hipoteza kontinuuma’. Da je ‘hipoteza kontinuuma’ neovisna o aksiomima standardne teorije skupova, tj. da je njezina istina ili neistina u konačnici stvar izbora, posebno je jak dokaz *neodrživosti* pretpostavke da objektivni svemir matematičkih istina postoji neovisno o vjerovanju.

Što se tiče kontinuiteta i diskretnosti, vidjeli smo da diskretni modeli kontinuiteta, koji uključuju pretpostavku postojanja beskonačnih skupova, unatoč kontekstualnoj svrhovitosti, ako se pomno ispitaju, proizvode antinomije i logički su manjkavi. Tobožnje ‘aktualno postojeće’ beskonačnosti iskazuju se tek kao pragmatička pomagala radi zatvaranja rupa u matematičkome modeliranju prirode. Ako ‘beskonačnost’ ima smisla, onda možda samo kao ‘potencijalna beskonačnost’ – pa čak se i ‘potencijalna beskonačnost’, kad se pobliže ispita, iskazuje kao dvosmislen i neuslužan pojam. Naime, strogo govoreći, netočno je reći za neki niz da se potencijalno proteže *in infinitum* umjesto *ad indefinitum*, tj. u beskonačnost umjesto u *neodređenu* daljinu. Naravno, mogu postojati pravila koja utvrđuju da se izvjesnomu nizu mogu dodavati novi članovi do neodređene granice; ali znači li 'neodređeno' ovdje automatski i 'beskonačno', to je naravno upitno.

Sve je to naravno od velike važnosti za pitanje 'matematičke istine'. Paradoksi beskonačnosti, kao što smo vidjeli, bacaju duboku sjenu na Galilejevo samopouzdano uvjerenje da je svijet 'napisan jezikom matematike'. Odgovor na takvu tvrdnju je odmah, *kojom vrstom* matematike? Matematički modeli ovise o određenim početnim premisama, i matematičko će rezoniranje neizbježno biti ograničeno onim što se može ili ne može logički izvesti iz takvih premisa, ili je pak s njima logički suglasno. Ukratko, u strogo matematičkome kontekstu može se u pravome smislu riječi govoriti samo o tome je li nešto, s obzirom na osnovne pretpostavke, *ispravno* ili *neispravno*, a ne je li 'istinito' ili 'pogrješno'.

Ako se, međutim, 'matematička istina' svodi na 'ispravnost' (izvoda iz premisa) onda 'matematička istina' ne može biti logički 'jednostavan' pojam. Doista, moglo bi se reći da matematičke propozicije pružaju najbolji protuprimjer tezi da je istina logički jednostavan pojam. Razlog zašto mnogi logičari inzistiraju na logičnoj 'jednostavnosti' pojma istine treba tražiti uglavnom u tvrdokornoj platonističkoj predrasudi da sve pravilno oblikovane propozicije nužno ili izražavaju ili ne izražavaju neku činjenicu. Ako je dana propozicija istinita, kažu oni, zar to ne znači da su stvari baš onakve kako su u toj propoziciji opisane? Drugim riječima: p je istinito ako, i samo ako, p jest. Što još tomu treba dodati?

Mora se priznati da ima nešto duboko privlačno u takvu gledištu. Pa ipak, malo promišljanja pokazuje da je logički neodrživo. U nedostatku određenih semantičkih uvjeta, praktički bilo što se može zamijeniti za p u 'p je istinito *ako, i samo ako*, p jest'. Bilo koja sintaktički pravilno sročena rečenica bit će dovoljna – formalno govoreći. Pretpostavljajući neka određena (formalna) pravila substitucije, čak i takve besmislice kao 'Crno je bijelo' ili 'Željezo je načinjeno od drva' mogle bi se nazvati 'istinitim' – tj. u smislu 'formalno ispravnima'. Sve to samo naglašava činjenicu da ako je takozvana 'jednostavna' definicija uopće od bilo kakve koristi, onda samo dotle dok se poprati s nekim određenim semantičkim ograničenjima koja isključuju takve i slične besmislice. To međutim odmah pokreće niz novih pitanja, posebice pitanja koja se tiču *kriterija smislenosti* i *uvjeta objektivnosti* onoga što se izjavljuje ili tvrdi.

Bez naznake kriterija smislenosti i uvjeta objektivnosti takozvana 'jednostavna' definicija ostaje isprazna.