Matka 27 (2016./2017.) br. 101

DOMINO PLOČICE I 4 × 4 PLOČA – PRVA IGRA

Maja Starčević, Zagreb

Eva je posjetila svoga prijatelja Petra koji je na stolu imao domino pločice.

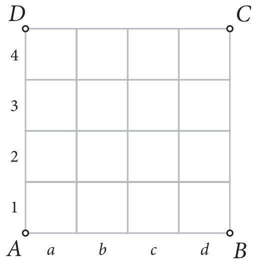
– Igraš domino? – zapitala ga je.

– Ne, zadao sam si jedan matematički zadatak. Objasnit ću ti detaljno pa mi možeš pomoći riješiti ga. Na stolu imam ploču. Ploča je u obliku kvadrata čije sam vrhove označio s *A*, *B*, *C* i *D*. Ploča *ABCD* podijeljena je na šesnaest sukladnih kvadrata (Slika 1.). Kvadrati su takvi da jedna domino pločica može prekriti točno dva susjedna kvadrata. Dakle, moje pločice imaju dimenzije 1 × 2, a ploča dimenzije 4 × 4 i svaki od malih kvadrata jedno je polje ploče. Ako postavim neku pločicu na ploču, ona mora biti postavljena tako da pokriva točno dva polja. Dakle, pločicu mogu postaviti samo vodoravno ili okomito. Ako stavim više pločica na ploču, one ne smiju pokrivati isto polje.

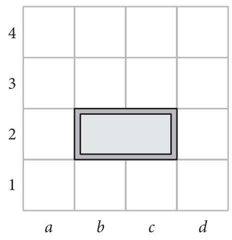
– Domino pločice su različite jer na sebi imaju drugačiji broj točkica. Kako to utječe na tvoj zadatak? – upitala je Eva.

– Ne utječe. Pločice sam okrenuo tako da se ne vide točkice. Dakle, izgledaju jednako. Stupce ploče označio sam slovima *a*, *b*, *c*, *d*, dok ću retke označavati brojevima 1, 2, 3 i 4, slično kao na šahovskoj ploči. Pomoću tih oznaka mogu se pozivati na neko polje ploče, npr. polje *b*3 nalazi se u drugom stupcu i trećem retku ploče. Također, ako imam pločicu koja prekriva npr. polja *c*3 i *c*4, kažem da imam postavljenu pločicu *c*3–*c*4, odnosno pločicu na poziciji *c*3–*c*4.

– Sve mi je jasno. I kako glasi taj zadatak?



Slika 1.



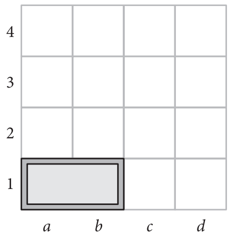
Slika 2.

– Oboje ćemo sjediti s iste strane stola i nećemo zakretati ploču. Postavi jednu pločicu na neko mjesto na ploči u skladu s pravilima koja sam osmislio.

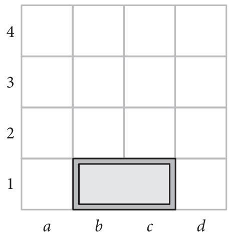
Eva stavi pločicu na poziciju *b*2–*c*2 (Slika 2.).

Petar joj nakon toga kaže:

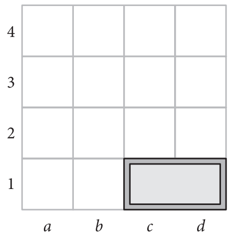
– Ovo očito nije jedini način na koji si to mogla napraviti. Mene sada zanima na koliko se ukupno načina može postaviti pločica. Prvo sam primijetio da pločicu mogu postaviti npr. vodoravno i da tada u potpunosti pripada nekom retku ploče. U prvi redak mogu postaviti pločicu na 3 načina (Slike 3., 4. i 5.). Na isti broj načina mogu postaviti pločicu i u svaki od preostalih redaka.



Slika 3.



Slika 4.



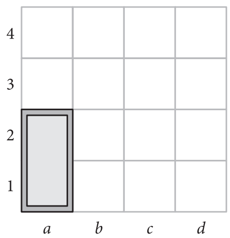
Slika 5.

– Dakle, kako imamo 4 retka, vodoravno možemo pločicu postaviti na $4 \cdot 3 = 12$ načina.

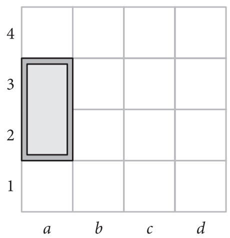
– Točno. Na isti način zaključujem i da se pločica može postaviti okomito u prvi stupac na 3 načina (Slike 6., 7. i 8.).

– Isto vrijedi i za ostale stupce, a kako i njih imamo 4, pločica se u stupce može također postaviti na 12 načina.

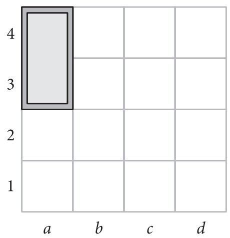
– Dakle, pronašli smo ukupno 24 načina kako postaviti pločicu.



Slika 6.



Slika 7.

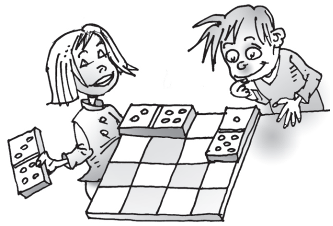


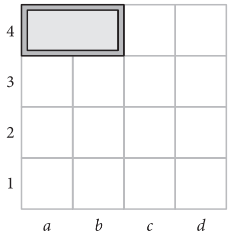
Slika 8.

– Pa zadatak zapravo i nije jako težak – kaže Eva. – Mogli bismo ga malo zakomplicirati. Imam ideju. Pronađimo broj načina na koji možemo postaviti dvije pločice na ploču. Podsjećam te da se pločice ne smiju preklapati, odnosno ne možemo ih staviti jednu preko druge. Gledat ćemo opet ploču s iste strane stola i nećemo je zakretati.

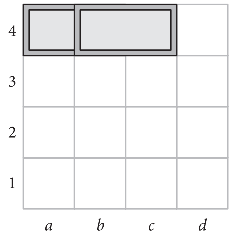
Nakon malo razmišljanja Eva je primijetila:

– Ako stavim jednu od pločica na neko mjesto, onda ne mogu staviti drugu pločicu na svako mjesto koje poželim. Broj načina da se postavi druga pločica tada ovisi o načinu na koji je postavljena prva. Stavit ću npr. pločicu na poziciju *a*4–*b*4 (Slika 9.). Tada drugu pločicu ne mogu staviti na to isto mjesto, ali ne mogu je staviti niti na pozicije *b*4–*c*4 (Slika 10.), *a*3–*a*4 (Slika 11.) niti na *b*3–*b*4 (Slika 12.) jer će se preklapati s prvom pločicom. Dakle, drugu pločicu ne mogu staviti na 4 mjesta. Kad smo rješavali prvi zadatak, zaključili smo da na praznu ploču možemo staviti pločicu na 24 načina. U ovom slučaju koji sam opisala, drugu pločicu možemo prema tome staviti na 24 – 4 = 20 načina.

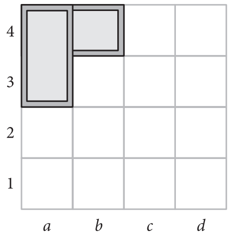




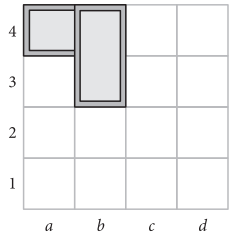
Slika 9.



Slika 10.



Slika 11.



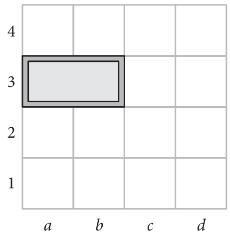
Slika 12.

– A ja sam primijetio da se isto može zaključiti i ako prvu pločicu stavimo na bilo koje mjesto na ploči tako da pločica dira rub ploče s dvije svoje stranice. To će dogoditi i ako je prva pločica na mjestima *a*3–*a*4, *c*4–*d*4, *d*3–*d*4, *d*1–*d*2, *c*1–*d*1, *a*1–*b*1 te *a*1–*a*2. Dakle, prvu pločicu možemo postaviti na 8 načina tako da dodiruje rub ploče s dvije stranice.

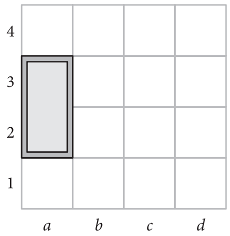
– Točno. Inače, imamo četiri načina kako postaviti prvu pločicu, s obzirom na to kako dira rub ploče. Nju možemo postaviti kao što si prethodno opisao, zatim tako da dodiruje rub ploče kraćom stranicom (kao npr. na Slici 13.), zatim da dodiruje rub ploče duljom stranicom (npr. Slika 14.) te da uopće ne dodiruje rub ploče (npr. Slika 15.).

Petru je to dalo ideju za nastavak rješenja:

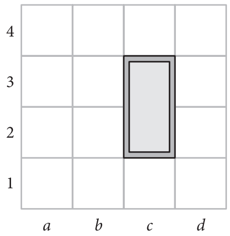
– U drugome od tih slučajeva možemo tako postaviti prvu pločicu na 8 načina i nakon toga, zaključujući slično kao i u prvom slučaju, vidim da ne mogu postaviti drugu pločicu na 6 načina na koju bih je mogao postaviti da je ploča prazna. Dakle, drugu pločicu u ovome slučaju mogu postaviti na 24 – 6 = = 18 načina.



Slika 13.



Slika 14.



Slika 15.

Eva je nastavila zaključivati na sličan način:

– U trećem slučaju imamo 4 pozicije za prvu pločicu i 24 – 5 = 19 za drugu, a u četvrtom slučaju 4 pozicije za prvu i 24 – 7 = 17 za drugu pločicu.

Petar je onda zaključio:

– Sada broj postavljanja možemo dobiti uzastopnim prebrojavanjem iz sva četiri slučaja pa dobivamo

$$8 \cdot 20 + 8 \cdot 18 + 4 \cdot 19 + 4 \cdot 17 = 448.$$

– Muči me još jedna stvar – potuži se Eva. – Ako na ploči imam postavljene dvije pločice, kako ću znati koja je zapravo prva, a koja druga pločica?

– Dobro si primijetila, Eva. Problem je zapravo u tome što smo mi u našem zaključivanju to postavljanje dobili dva puta. Svaka je pločica u jednome od ta dva postavljanja bila prva pločica, a u drugom je bila druga pločica. Ali između tih postavljanja zapravo nema razlike jer pločice izgledaju jednako. To vrijedi za bilo koje postavljanje.

– Dakle, dobili smo dvostruko više postavljanja pa dobiveni rezultat moramo podijeliti brojem 2.

– Imaš pravo. Sad možemo konačno zaključiti da je broj postavljanja pločica koja smo promatrali jednak 448 : 2 = 224.

– Ovi su mi zadatci baš zanimljivi. Nađimo se i sutra pa ćemo smisliti još sličnih zadataka koje možemo riješiti – zaključi Eva.

– Može, onda vrijedi dogovor za sutra.