RED, KAOS I JOŠ PONEŠTO O FRAKTALIMA

Jadranka Delač-Klepac, Zagreb

Za vrijeme školskog izleta na jedan otok Jadranskog mora mali učenici čarobmatičke škole dobili su zadatak promatrati noćno nebo. Kako je noć bila prohladna i vedra, a oni na otoku Plavniku (malom otoku pored Krka) na kojem nije bilo mnogo svjetlosnog zagađenja, mladi čarobnjaci koji su došli iz grada bili su zapanjeni slikom noćnog neba.

– Potpuno drukčije nego u Zagrebu! Kako je ovdje lijepo noćno nebo! Koliko zvijezda, a mnoge su tu iznad nas, kao u jednoj pruzi... čini mi se da bih ih mogao dotaknuti kada bih samo malo više skočio... – rekao je Val koji je na otok došao iz Zagreba.

– To je naša galaksija, Mliječni put. Tako su je ljudi nazvali upravo zbog ove svijetle pruge pune zvijezda koja prolazi cijelim nebom, iako je to samo jedan krak spirale koju čini naša galaksija – odgovorio mu je već iskusni Svjetlan.

– Upravo je nevjerojatno gledati ovu ljepotu iznad nas, osjetiti kako se kreće, i to ne samo zbog vrtnje Zemlje... Čudesno neko kretanje... Koliko je reda u njemu... Hm, a što se događa u središtu te spirale koju čini naša galaksija? – upitao je Val i upravo po tome kako su ti „klinci" postavljali pitanja o svemu i svačemu vidjelo se zašto uopće pohađaju čarobmatičku školu za buduće prave čarobnjake.

– Znanstvenici smatraju da se u središtu naše galaksije nalazi takozvana crna rupa, materija vrlo velike gustoće i gravitacije koja usisava okolnu materiju... Ne zna se što se događa u crnoj rupi... Ona je, kako je oni zovu – **atraktor**, konačno stanje kojem teži materija koju mi vidimo u našem dijelu svemira, u našoj galaksiji... – tu je Svjetlan zastao i pogledom potražio pomoć od Baltazara.

– Zamislite ping-pong lopticu koju ispustimo iznad površine mora s velike visine za mirnog vremena. Mi možemo predvidjeti njenu putanju do površine mora prilično točno znajući zakon gravitacije. Međutim, kada ona padne na površinu mora, koja je ovdje taj atraktor, mi ne znamo kako će se loptica dalje kretati... Njezino kretanje ovisit će o previše nepoznatih parametara kao što su: brzine morskih struja, visina i kretanje valova, vjetrovi, brodovi koji prolaze... Nama bi se činilo, ako bismo pratili njezino kretanje, da u njemu nema nikakve pravilnosti i nazvali bismo ga – kaotičnim – nadovezao se Baltazar na Svjetlanovo objašnjenje i odmah iskoristio dobivenu priliku da ih upozna s novim pojmovima.

Cilj mnogih ljudskih djelatnosti u različitim znanostima predviđanje je načina na koji će se neki proces odvijati. Koji put je naše predviđanje uspješno – primjerice kao kod predviđanja vremena plima i oseka, ili pomrčine Sunca, a ponekad vrlo teško i nepredvidivo – kao kod vremenskih prognoza, učestalosti potresa, kretanja vrijednosti dionica na burzi i sl.

Takve pojave (ili procese) zbog nestabilnosti njihovih odrednica (parametara) zovemo **dinamički sustavi.** Što je veći broj tih parametara o kojima ovisi ponašanje pojave koju promatramo, zadatak je teži.

Dinamički sustavi proučavaju se i u matematici i u fizici (dio fizike koji se zove dinamika, termodinamika i sl.), a pomalo laički i koncepcijski naziv nove znanosti je – **teorija kaosa**. Sustav se može ponašati neočekivano i potpuno kaotično čak i ako nije slučajan. U teoriji kaosa, kaos je determinirajuća, određujuća pojava, što znači da se može opisati nekom formulom (ili postupkom) koja bi trebala obuhvatiti sve parametre o kojima ovisi ta pojava (problem je prepoznati i naći sve te parametre!). Konačni dobiveni rezultati mogu biti potpuno predvidivi, ali i nepredvidivi i iznenađujući. Zato se još taj kaos, koji je predmet proučavanja ove nove grane znanosti, zove **deterministički kaos**, da se naglasi činjenica da se tu ne radi o slučajnim procesima ili pojavama. Kod slučajnih pojava rezultati ne ovise o prethodnim događanjima – primjer za to je bacanje kocke.

Naziv *kaos* ponekad zbunjuje jer mi kaos intuitivno dovodimo u vezu sa slučajnim i nepredviđenim događajima i neredom, zato se naglašava da se tu radi o determinističkom kaosu koji možemo opisati formulama!

Razvojem računala i njihovom uporabom u svrhu istraživanja dinamičkih sustava omogućena je vizualizacija kaosa. Otkriven je čarobni svijet **fraktala**, geometrijskih oblika velike ljepote koji u sebi kriju pojmove kao što su *simetrija* i *samosličnost*. Ipak, ono što je zapanjujuće je to da se nepredvidivost pojavljuje i u jednostavnim sustavima koji ovise o jednoj varijabli.

Pokušajmo objasniti pojam kaosa na jednostavnoj kvadratnoj funkciji

$$f(x) = kx(1-x),\, k \in R^{+}, \tag{1}$$

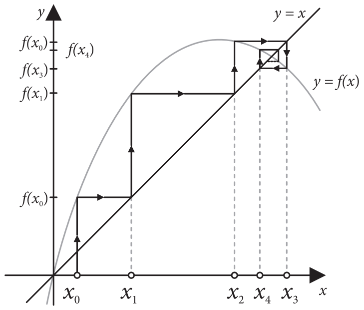
kojom još od 19. stoljeća (ekonomisti Malthus i Verhulst) pokušavaju opisati neke pojave u prirodi poput populacija pojedinih životinjskih vrsta na ograničenom području (ribe u jezeru, zečevi na otoku i sl.). Zato se ova funkcija zove i *logistička funkcija*. (Postoje i eksponencijalne logističke funkcije rasta koje opisuju neke druge slučajeve rasta populacije, ali o njima ćete učiti mnogo kasnije). Koeficijent k je tzv. konstanta rasta i ovisi o vrsti te govori koliko će biti jedinki u sljedećoj generaciji koja se modelira. Maksimalna populacija koju okolina može podržati je 100 % (odnosno 1), dakle populacija se može kretati između brojeva 1 i 0, pa je (1 – x) mjera prostora koju priroda dopušta za rast populacije.

Definirajmo sljedeći pojam:

Definicija: Za neku zadanu funkciju f vrijednosti funkcije $f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0)))$... zovemo **iteracije funkcije** f u točki x_0.

Pri tome $x_1 = f(x_0)$ zovemo prvom iteracijom od f u točki x_0, analogno definiramo drugu iteraciju kao $x_2 = f(f(x_0))$, itd.

Iteracije možemo lako opisati sljedećim grafom:



Slika 1.

Dakle, postupak je sljedeći:

1. Počinjemo s točkom x_0.
2. Nacrtamo okomicu iz x_0 do grafa f, zatim horizontalu do pravca $y = x$, zatim opet vertikalu do grafa funkcije f, itd. Ovako dobivene x-koordinate točaka grafa funkcije su iteracije od f u x_0, a očitavamo ih na x-osi (Slika 1.)

n	x_n
0	0.1
1	0.234
2	0.46603
3	0.64700
4	0.59382
5	0.62712
6	0.60799
7	0.61968
8	0.61276
9	0.61694
10	0.61444

Proučimo grafove na Slici 2. koje dobijemo ako izračunamo iteracije funkcije (1) za sljedeće izbore parametara i početne vrijednosti od x:

a) $k = 2.6, \quad x_0 = 0.1$

b) $k = 3.1, \quad x_0 = 0.1$

c) $k = 3.8, \quad x_0 = 0.1$

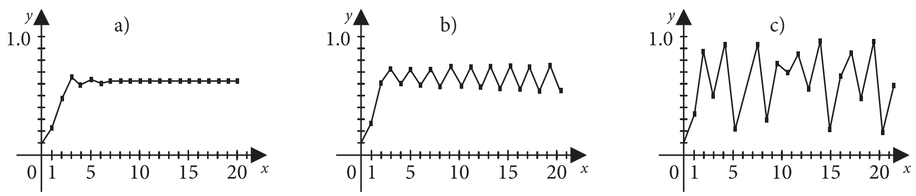
Za k između 0 i 1 ($0 < k < 1$) populacija izumire.

Na x-osi nalaze se vrijednosti od x koje uvrštavamo u formulu (1), a na y-osi vrijednosti iteracija x_n koje smo dobili za x.

Ako vrijednosti iteracija za a) slučaj izračunamo kalkulatorom (na grafičkom kalkulatoru iteracije se vrlo lako računaju!) dobit ćemo ovu tablicu na rubu.

Iz ove tablice vidimo da se populacija u slučaju a) stabilizirala nešto iznad broja 0.61, što bi u postotku bilo oko 61 % od maksimalne populacije. Već deseta generacija x_{10} pokazuje tendenciju stabilizacije oko 61.4 % od maksimalne populacije.

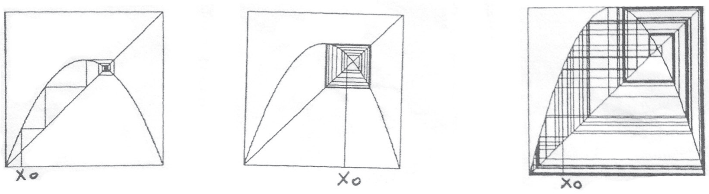
U slučaju b) populacija oscilira između dviju vrijednosti, a u slučaju c) kažemo da se populacija ponaša kaotično. Na grafovima to izgleda ovako:



$k = 2.6$ $\qquad$ $k = 3.1$ $\qquad$ $k = 3.8$

Slika 2.

Prikažimo ove iteracije još i grafovima poput onog na Slici 1. u kojem se vidi i graf funkcije i promatrane iteracije. Tada to izgleda ovako:



Slika 3.

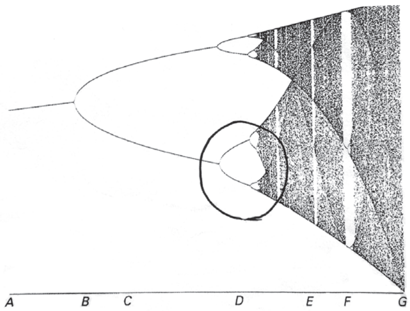
Na grafu a) na Slici 3. lako se vidi kako iteracije teže k jednoj točki, na grafu b) vidi se da iteracije stalno skaču iz jedne točke u drugu nakon određenog broja iteracija, a na grafu c) ne uočavamo nikakvu pravilnost pa možemo reći da je gibanje točke u ovom slučaju kaotično.

Ovdje vidimo tri različita atraktora. U a) i b) slučaju su **nekaotični atraktori** koji dovode do stabilnih stanja (jedna točka ili dvije točke, a ako očitamo njihove x-koordinate, dobit ćemo vrijednosti kojima teži populacija koju istražujemo), dok smo u c) slučaju dobili **kaotični atraktor** tj. beskonačno mnogo točaka koje se nalaze na grafu funkcije f, a njihove x-vrijednosti kreću se nasumce od 0 do 1.

Isto tako možemo uočiti kako je maleni pomak u vrijednosti parametra k (od 3.1 na 3.8) doveo do potpuno nepredvidivog ponašanja točke u c) slučaju. Matematičari tu pojavu zovu **leptirov učinak** ili *butterfly effect* – jer vrlo mali pomaci u početnim uvjetima mogu dovesti do jako različitih konačnih rezultata.

Pogledajmo još na Slici 4. fraktalno ponašanje atraktora dinamičkog sustava dobivenog proučavanjem logističke funkcije (1); na x-osi su vrijednosti parametra k, a na y-osi vrijednosti od 0 do 1:

A $k = 2.9$
B $k = 3.0$
C $k = 3.2$
D $k = 3.5$
E $k = 3.74$
F $k = 3.83$
G $k = 4.0$



Slika 4. (iz knjige Fractals autora Hansa Lauweriera)

Sa slike se jasno vidi kada se (ovisno o k) pojavljuje jedan atraktor, kada dva, a kada dolazi do kaosa.

Kada bismo povećali zaokruženi dio grafa koji kao da ima beskonačnu dubinu, dobili bismo opet početni graf. Gotovo istovjetan. I taj bismo postupak mogli dalje nastavljati – uvećavati mali dio prijašnjeg zaokruženog grafa... Dakle, ovdje opet možemo prepoznati samosličnost koja je jedna od karakteristika fraktala.

Prisjetimo se još nekoliko činjenica o fraktalima iz prijašnjih Matki:

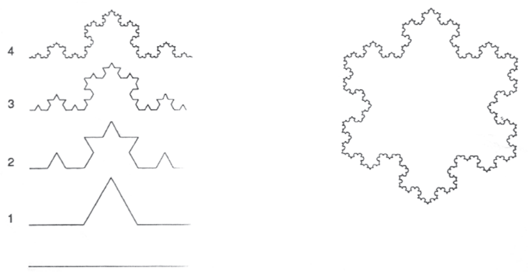
Iz Matke broj 95 možemo ponoviti:

Fraktal je geometrijski lik koji se može razložiti na manje dijelove tako da svaki od njih, makar približno, bude umanjena kopija cjeline. Pojam fraktala uveo je 1975. godine američki matematičar poljskog podrijetla ***Benoit Mandelbrot*** *(1924. – 2010.), a potječe od latinske riječi fractus, što znači slomljen. Osim što su izlomljeni, za fraktale je karakteristično da se isti oblik stalno ponavlja. Ako se neki dio fraktala uveća, izgledat će kao cijeli.*

Mandelbrot je fraktal definirao kao geometrijski objekt čija je **fraktalna dimenzija** veća od topološke.

Topološka dimenzija intuitivno je slična našem poimanju dimenzije euklidskog prostora gdje su dimenzije cjelobrojne veličine. Primjerice, pravac je jednodimenzijski, ravnina dvodimenzijska, kocka trodimenzijska. Međutim, fraktalne dimenzije nisu cjelobrojne veličine.

Pogledajmo na primjeru Kochove pahuljice (otkrio ju je švedski matematičar **Niels Fabian Helge von Koch** (1870. – 1924.); interesantno – njegova godina smrti godina je rođenja B. Mandelbrota) kako možemo pojasniti pojam fraktalne dimenzije i prisjetimo se kako se Kochova pahuljica dobije spajanjem triju Kochovih krivulja:



Slika 5.

Osobenost ovoga geometrijskog lika je da ima konačnu površinu, a beskonačan opseg. Nakon velikog broja iteracija vidi se da se duljina ove krivulje povećava i da je postala nekako „zgužvana", sitno razlomljena, hrapava, naborana. **Stupanj te „zgužvanosti" mjeri se fraktalnom dimenzijom koja nam govori**

u kojoj mjeri neki fraktal zauzima ravninu (ili prostor ako se radi o prostornim fraktalima). Tako Kochova krivulja ima fraktalnu dimenziju 1.2619.

Postoje različiti fraktali. Prema jednoj podjeli možemo ih ovako klasificirati:

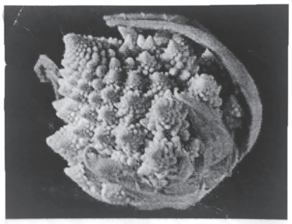
– **geometrijski i algebarski** (koji se mogu opisati iterativnim ili rekurzivnim formulama)

– **stohastički** (ili slučajni – javljaju se u prirodi: rub morske obale, oblik planina, oblaka, munje, svemira, paprati, te mnogih drugih biljaka i sl.)

Primjer geometrijskog fraktala je Kochova krivulja (Slika 5.).

Primjer algebarskog fraktala dobili smo proučavanjem ponašanja atraktora logističke funkcije $f(x) = kx(1-x), k \in R^{+}$, ovisno o *k*, (Slika 4.) u gornjem tekstu.

Primjer stohastičkog fraktala je brokula (Slika 6.).



U ovoj brokuli se jasno vidi fraktalna struktura.

Slika 6.

Postoje i druge klasifikacije fraktala – **prema stupnju samosličnosti** (Kochova krivulja i fraktalno ponašanje atraktora logističke funkcije razlikuju se po stupnju samosličnosti), **prema načinu nastanka** (prirodni, umjetni) itd.

Još mnogo lijepih slika fraktala lako možete pronaći na vašem računalu.

Tu je Baltazar zastao, a njegov učenik Val ga je upitao:

A kolika je duljina obale otoka Plavnika? Ili naše morske obale? Ovisi li o duljini štapa kojim je mjerimo? Jer, očito da nećemo dobiti isti rezultat ako obalu mjerimo štapom duljine 1 m ili štapom od 10 cm! Kolika je njihova fraktalna dimenzija?

Znači, pažljivo ste slušali kada ste postavili to pitanje. Možda ćete vi jednog dana izračunati fraktalnu dimenziju naše obale – zajedno s otocima, otočićima, hridima... U svakom slučaju, duljina naše obale ima fraktalnu dimenziju sigurno veću od 1. *Negdje sam pročitao da obala Norveške ima fraktalnu dimenziju* 1.52, *pa je fraktalna dimenzija naše obale vjerojatno nešto malo manja.*

Literatura:

1. Stewart, Redlin, Watson: *Precalculus* (Brooks/Cole, fourth editition)
2. Peitgen, Jurgens, Saupe: *Fractals for the classroom* (Springer-Verlag, 1992.)
3. Stewart: *The magical maze* (Phoenix, 2013.)
4. Ivana Katalenac: *Fraktali – Sierpinski*, Matka br. 95
5. Hans Lauwerier: *Fractals* (Princeton Science Library, 1991.)
6. hr.wikipedia.org/wiki/fraktal