PROBLEM S NOVČIĆEM

Karlo Franić i David Dorotić, XV. gimnazija, Zagreb

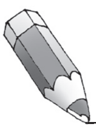
Kao što već sigurno znate, novčić ima dvije strane: pismo (P) i glavu (G). Bacanjem novčića u zrak on uvijek pada na jednu od tih strana. Možemo reći da novčić ima 50 % mogućnosti da padne na pismo i 50 % mogućnosti da padne na glavu. A kolika je mogućnost da dva puta zaredom padne glava? Ako glava pada u $\frac{1}{2}$ slučaja, onda će dva puta pasti u $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ odnosno $\frac{1}{4}$ slučaja, odnosno mogućnost da glava padne dva puta zaredom je 25 %. Kolika je vjerojatnost da glava padne 5 puta zaredom? Kolika je vjerojatnost da glava padne *n* puta zaredom?

Probajmo riješiti malo teži problem. Kolika je vjerojatnost da u *n* bacanja novčića ne dobijemo dva pisma zaredom sve do zadnja dva bacanja? Možemo taj problem zamisliti i drugačije. Bacamo novčić dok ne dobijemo dva pisma zaredom i tada prestajemo s bacanjem. Kolika je vjerojatnost da smo bacali točno *n* puta? Krenimo od samog početka. Ako bacamo novčić samo dva puta, imamo 4 moguća ishoda. To su: PP, GP, PG, GG. U jednom od ta 4 ishoda dobili smo dva pisma zaredom. Znači da je mogućnost da u dva bacanja dobijemo dva pisma zaredom odnosno 25 %. Nadalje, ako bacamo novčić tri puta, imamo 8 mogućih ishoda: PPP, PPG, PGP, PGG, GGG, GGP, GPG, GPP. Od ovih 8 ishoda samo nam jeda odgovara, a to je GPP. Zašto nam PPP ne odgovara?

Dakle, mogućnost da niz od tri bacanja novčića završi s dva pisma iznosi $\frac{1}{8}$, odnosno 12.5 %.

Zadatak 1. Ispišite sve povoljne ishode za četiri bacanja novčića. Jeste li dobili dva povoljna ishoda? Ispišite sve povoljne ishode za pet, šest i sedam bacanja novčića. Rješenja možete provjeriti u tablici.

Broj bacanja	Broj mogućih ishoda	Broj povoljnih ishoda	Postotak
2	4	1	25 %
3	8	1	12.5 %
4	16	2	12.5 %
5	32	3	9.38 %
6	64	5	7.81 %
7	128	8	6.25 %



Koliki je postotak za 8 bacanja?

Primijetimo da je broj mogućih ishoda za n bacanja $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$, a ako bolje pogledamo broj povoljnih ishoda, možemo vidjeti da je to početak Fibonaccijevog niza. Fibonaccijev niz je niz brojeva koji počinje s 1, 1, a svaki sljedeći broj je zbroj prethodnih dvaju: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89... Fibonaccijev niz također se može zapisati na sljedeći način:

$$F(3) = F(2) + F(1)$$

$$F(4) = F(3) + F(2)$$

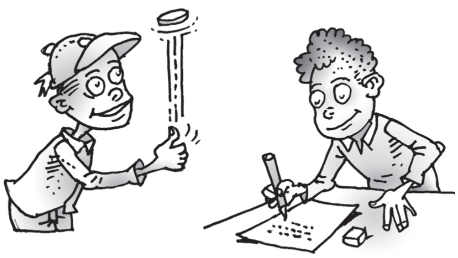
$$\vdots$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)\,.$$

Hoće li vjerojatnost za 20 bacanja stvarno biti $\frac{F(19)}{2^{20}}$? $F(19)$ je zato što bacanja počinju od $n = 2$, a ne od $n = 1$.

Promotrimo samo povoljne ishode. Znamo da će bacanje završiti s dva pisma, također znamo da se nigdje prije ne smiju pojaviti dva pisma jer to znači da bismo već završili s bacanjem. Budući da znamo kraj niza, a početak se može mijenjati, onda ćemo dodavati elemente na početak niza. Na primjer, u nizu xxPP, xx možemo zamijeniti sljedećim podnizovima; GG, PG, a ne smijemo zamijeniti s PP, GP. Ako malo bolje pogledamo, zaključit ćemo da ako neki podniz počinje pismom, ispred njega može doći jedino glava. Jer ako bismo ispred stavili pismo, onda bi niz počinjao s dva pisma, a to se ne smije dogoditi. Ako podniz počinje glavom, na njegov početak mogu doći i pismo i glava.

Zadatak 2. Krenimo od nizova za četiri bacanja: GGPP, PGPP. Pomoću njih konstruiramo nizove za pet bacanja tako da na početak niza stavimo P ili G. G možemo staviti ispred oba niza pa dobivamo GGGPP i GPGPP. P možemo staviti samo ispred niza koji počinje s G pa ćemo dobiti PGGPP. Tako smo dobili ukupno 2 + 1 = 3. Postoje tri niza za pet bacanja. Stavite ispred svakog od njih G ili P tako da dobijete nizove za šest bacanja. Koliko ih je koji počinju s G, koliko ih počinje s P, a koliko ukupno? Nastavite na isti način za sedam bacanja. Uočavate li pravilnost?



Rješenja provjerite u tablici.

n	$S_p(n)$ broj povoljnih slučajeva koji imaju P na početku	$S_g(n)$ broj povoljnih slučajeva koji imaju G na početku	$S(n)$ ukupan broj povoljnih slučajeva
2	1	0	1
3	0	1	1
4	1	1	2
5	1	2	3
6	2	3	5
7	3	5	8
8	5	8	13

Probajmo dokazati da će ukupan broj nizova za n bacanja biti Fibonaccijev broj. Dokazat ćemo četiri tvrdnje:

1) $S(n) = S_g(n) + S_p(n)$

Formula vrijedi jer je ukupan broj povoljnih slučajeva jednak zbroju broja povoljnih slučajeva koji počinju s G i broja povoljnih slučajeva koji počinju s P.

2) $S_g(n) = S_p(n-1) + S_g(n-1) = S(n-1)$

Ova formula vrijedi jer G možemo dodati na početak bilo kojeg podniza.

3) $S_p(n) = S_g(n-1)$

Vrijedi, jer P možemo dodati samo početak podniza koji je počinjao s G.

Konačno možemo zaključiti da vrijedi:

4) $S(n) = S_g(n) + S_g(n-1) = S(n-1) + S(n-2)$.

Dokazali smo da se ukupan broj mogućnosti dobiva zbrajanjem ukupnih brojeva mogućnosti iz prethodnih dvaju koraka, što je definicija Fibonaccijevog niza. Tako smo dokazali da će za n bacanja mogućnost dobivanja dvaju uzastopnih pisama na kraju niza biti $\frac{F(n-1)}{2^n}$, $n \geq 2$.