David Bojanić, Andrea Švob, Rijeka

Matka 27 (2016./2017.) br. 101

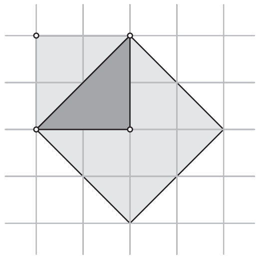
DVA KLASIČNA GEOMETRIJSKA PROBLEMA[1]

Geometrija je najstarija grana matematike, koja se razvijala još od najranijih civilizacija. Već u doba antike ljudi su poznavali i koristili geometriju. U vrijeme antičke Grčke razvoj geometrije doživljava svoj procvat i nagli uspon, počevši od Talesa i Anaksimena, Pitagore i pitagorejske škole, pa sve do Euklida, Eudoksa i Arhimeda. Svim tim poznatim grčkim misliocima moramo biti zahvalni na znanju koje danas imamo.

Znanstvenici toga doba često su se bavili pitanjima i problemima vezanim uz geometrijske konstrukcije koji se mogu riješiti pomoću šestara i ravnala, no vrlo često nisu bili u mogućnosti riješiti te probleme jer znanje iz geometrije kojim su Grci u to doba vladali nije bilo dovoljno za njihovo rješavanje. U ovom će nas tekstu zanimati euklidske konstrukcije, a to su konstrukcije kod kojih je dopušteno korištenje samo jednobridnog ravnala[2] (u nastavku često ćemo govoriti samo *ravnalo*) i šestara. Međutim, naglasak će biti na nekim problemima koje nisu uspjeli riješiti koristeći samo ravnalo i šestar, a to su duplikacija kocke i trisekcija kuta. Za ova dva problema prikazat ćemo i njihov zorni prikaz pomoću tehnike presavijanja papira – origamija.

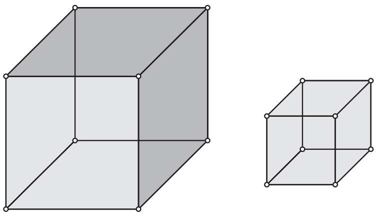
Duplikacija kocke

Stari Grci postavili su sljedeće pitanje o udvostručenju kvadrata: može li se jednobridnim ravnalom i šestarom konstruirati kvadrat dvostruko veće površine od zadanog kvadrata?



Slika 1. Udvostručenje kvadrata

Na pitanje su dali sljedeći odgovor: Može! Duljina stranice traženog kvadrata jednaka je duljini dijagonale zadanog kvadrata. (Slika 1.)



Slika 2. Problem duplikacije kocke

Također ih je zanimao odgovor na sljedeće pitanje: može li se jednobridnim ravnalom i šestarom konstruirati brid kocke dvostruko većeg obujma nego što je obujam zadane kocke. Mnogi matematičari toga doba bavili su se odgovorom na zadano pitanje, ali tek u prvoj polovini 19. stoljeća dokazano je da se tražena konstrukcija ne može napraviti.

[1]Članak je dio završnog rada Davida Bojanića, studenta preddiplomskog studija Odjela za matematiku Sveučilišta u Rijeci
[2]Jednobridno ravnalo svako je ravnalo na kojemu pri izvođenju geometrijske konstrukcije rabimo samo jedan brid.

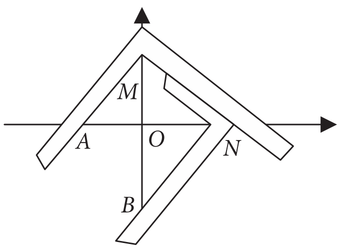
Matka 27 (2016./2017.) br. 101

Problem duplikacije kocke poznat je i kao Delski problem. Kako navodi povjesničar Teon iz Smirne, na otoku Delosu, smještenome na Egejskom moru, proširila se kuga ([1], [3]). Stanovnici toga otoka obratili su se za pomoć proročici od koje su dobili sljedeći savjet: problem kuge će se riješiti ako sagrade novi oltar u čast boga Apolona, dvostruko većeg obujma nego što je postojeći. Oltar boga Apolona bio je oblika kocke pa su Grci odlučili sagraditi oltar oblika kocke čiji je brid dvostruko dulji od brida postojećeg oltara. Na taj način sagradili su oltar čiji je obujam bio osam puta veći. Nažalost, budući da nisu ispunili ono što im je proročica savjetovala, kuga se još više proširila. Vjeruje se da se proročica htjela samo poigrati s njima i pokazati im da se geometrija mora učiti i proučavati kako bi je mogli razumjeti i koristiti.

Pokušajem rješavanja problema duplikacije kocke prvi se počeo baviti Hipokrat iz Hiosa u 5. stoljeću prije nove ere. Zaključio je sljedeće: ako je zadana kocka čija je duljina brida jednaka a, problem duplikacije kocke moguće je riješiti samo ako se mogu odrediti srednje geometrijske proporcionale između duljina a i $2a$. Srednje geometrijske proporcionale između dviju duljina a i b definiraju se kao duljine x i y za koje vrijedi:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}.$$

U ovom problemu vrijedi $b = 2a$, tj. dobivamo $x^2 = ay$, $xy = 2a^2$ te $x=a\sqrt[3]{2}$. Da bismo riješili problem duplikacije kocke trebamo konstruirati dužinu duljine $x=a\sqrt[3]{2}$ ako je zadana duljina a. Pojednostavimo li zadani problem, možemo uzeti jediničnu dužinu te problem svesti na konstrukciju dužine duljine $\sqrt[3]{2}$ koristeći samo jednobridno ravnalo i šestar.

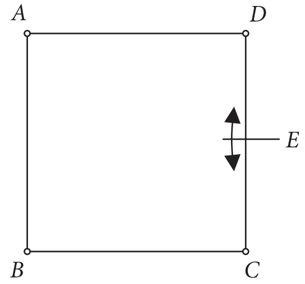


Slika 3. Rješavanje problema duplikacije kocke

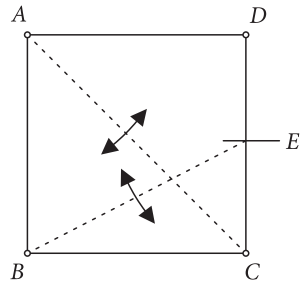
Jednim od pokušaja rješavanja ovog problema bavio se i Menehmo, Eudoksov učenik koji je živio u 4. stoljeću prije nove ere. U [1] i [4] prikazano je kako je Menehmo pokušao riješiti zadatak korištenjem pokretnog ravnala (Slika 3.).

Poslije Menehma, ovim problemom bavili su se i Eratosten, Nikomed, Apolonije, Heron, Papp i mnogi drugi mislioci toga doba. Godine 1837. Wantzel je dokazao da se problem duplikacije kocke ne može riješiti upotrebom jednobridnog ravnala i šestara, no ako u konstrukciji smijemo koristiti i mjerno ravnalo, problem je rješiv. Tvrdnju je dokazao na način da je ovaj geometrijski problem zamijenio problemom algebre.

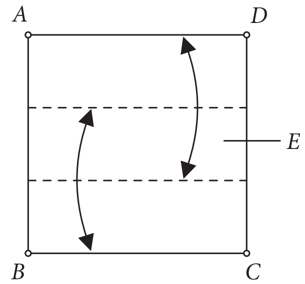
Također, zanimljivost je da je Peter Messer 1986. godine rješenje problema duplikacije kocke prikazao pomoću origamija ([5]).



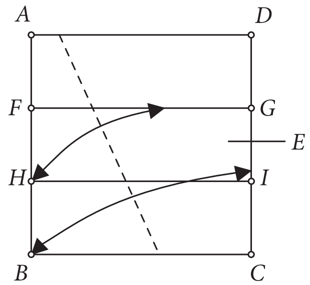
Papir u obliku kvadrata presaviti na pola.



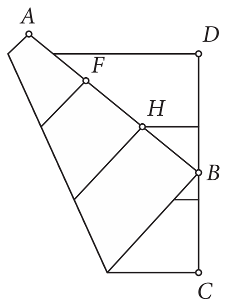
Presaviti papir na pravcima koji određuju točke A i C te B i E.



Presaviti papir tako da se podijeli na trećine.



Presaviti papir tako da nakon presavijanja točka H pripada dužini $\overline{FG}$, a točka B mora pripadati dužini $\overline{CD}$.



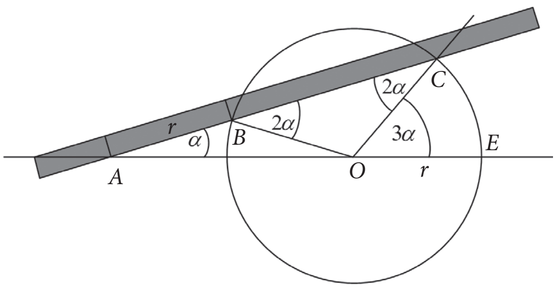
Dobiva se konačno rješenje, tj. konstruira li se brid kocke duljine $|BC|$, tada kocka dvostruko većeg volumena ima brid duljine $|DB|$. Vrijedi da je $\frac{|DB|}{|BC|}=\sqrt[3]{2}$.

Trisekcija kuta

Porijeklo problema trisekcije kuta je nepoznato, a za razliku od duplikacije kocke, koja se ne može konstruirati pomoću ravnala i šestara, trisekcija kuta je za neke kutove moguća. Klasičan problem podjele bilo kojeg kuta na tri jednaka dijela mnoge je grčke matematičare zaokupljao godinama. Ubrzo nakon definiranja problema shvatili su da ga neće biti lako riješiti koristeći samo ravnalo i šestar. Očito je da se trisekcije nekih kutova mogu konstruirati pomoću ravnala i šestara, no pitanje je možemo li to napraviti za bilo koji proizvoljno odabrani kut. Gauss je dao hipotezu da se duplikacija kocke i trisekcija kuta ne mogu općenito riješiti samo pomoću ravnala i šestara, no tek je 1837. godine francuski matematičar P. Wantzel dokazao da trisekciju kuta nije uvijek moguće napraviti koristeći samo ravnalo i šestar.

Jednu od najpoznatijih ideja za rješavanje problema trisekcije kuta dao je Hipija iz Elide, oko 420. godine prije nove ere. Osnovna ideja na kojoj počiva njegov pokušaj rješavanja te problematike bila je da ako znamo dužinu podijeliti na tri jednaka dijela, to ćemo moći napraviti i s kutom. U tu svrhu opisao je nove krivulje koje su se nakon njegovog doba nazvale Hipijine kvadratise ([4]).

Arhimed je u svojoj knjizi „Knjiga lema" prezentirao rješenje problema trisekcije kuta pomoću ravnala, šestara i trake papira. Prema [2] njegovo rješenje je sljedeće: neka je zadan proizvoljan kut mjere 3α. Oko vrha tog kuta opišimo kružnicu polumjera duljine r koja krakove zadanog kuta siječe u točkama E i C. Na traci papira označimo dvije točke, A i B, tako da vrijedi $|AB| = r$. Pripremljenu traku papira postavimo tako da točke A, O i E pripadaju istom pravcu i da joj rub prolazi točkom C. Traku sada mičemo tako da točka A ostaje fiksna na pravcu OE, a rub trake stalno prolazi točkom C sve dok točka B ne postane točka kružnice. Označimo li mjeru kuta $\angle AOB$ s α, vidimo da je veličina kuta $\angle OBC$ jednaka 2α, a veličina kuta $\angle EOC$ jednaka 3α.

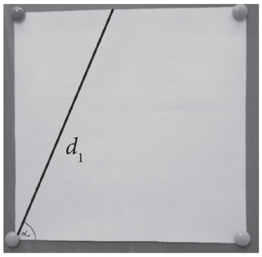


Slika 4. Trisekcija kuta pomoću trake papira

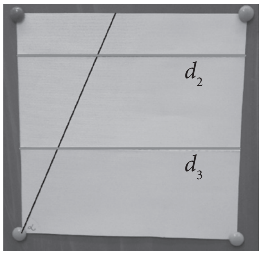
Trisekcija kuta se, kao i duplikacija kocke, može prikazati pomoću origamija. U sljedećih nekoliko koraka prikazat ćemo trisekciju kuta koju smo napravili pomoću tehnike presavijanja papira.

Pokušajte presavijanjem papira na opisani način postići duplikaciju kocke i trisekciju nekog kuta, a zatim se mjerenjem uvjerite da je dobiveni rezultat dobar.

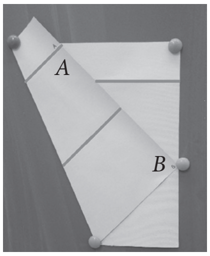
Problemima kojima su se bavili stari Grci, bavili su se i mnogi matematičari modernog doba. Stoga je opravdano ove probleme nazvati i klasični geometrijski problemi. Problemi duplikacije kocke i trisekcije kuta ne mogu se riješiti koristeći samo ravnalo i šestar pa je za njihovu konstrukciju potrebno koristiti i neka druga pomagala. Mnogi matematičari modernoga doba bavili su se dokazivanjem nerješivosti ovih problema, čime su zapravo pokazali koliko je geometrija u doba antičke Grčke bila napredna i razvijena, a nerješivost klasičnih problema koju su Grci naslućivali zaista se i pokazala točnom.



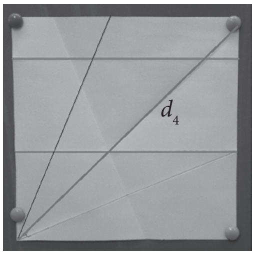
Neka je na papiru u obliku kvadrata zadan proizvoljan kut veličine α omeđen donjim rubom papira i dužinom ***d*1**.



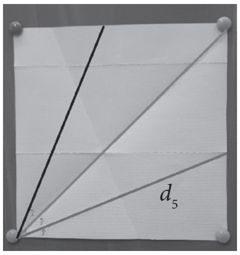
Presaviti gornju polovicu papira i stvoriti dužinu ***d*2**. Donji rub papira saviti do prethodno napravljene dužine i tako stvoriti dužinu ***d*3**.



Označiti s *B* točku u donjem lijevom kutu, a s *A* lijevi kraj dužine ***d*2**. Presaviti papir tako da točka *A* i točka *B* redom pripadaju dužinama ***d*1** i ***d*3**.



Tako savinuti papir presaviti dužinom ***d*3** i stvoriti dužinu ***d*4**.



Presaviti donji rub papira tako da se položi na dužinu ***d*4** kako biste stvorili dužinu ***d*5**. Dužine ***d*4** i ***d*5** dijele kut veličine α na tri jednaka dijela.

Nadamo se da smo uspjeli u čitatelju pobuditi interes i poštovanje prema tako zanimljivoj grani matematike – geometriji – jer, kao što je rekao Johannes Kepler: *Ubi materia, ibi geometria.* (*Gdje god je materija, na tome mjestu je i geometrija.*)

Literatura:

1. Gerš, Isakovič, Gleizer, Povijest matematike za školu, Školske novine i HMD, Zagreb, 2003.
2. D. Palman, Geometrijske konstrukcije, Element, Zagreb, 1996.
3. C. J. Scriba, P. Schreiber, 5000 Years of Geometry, Springer, Basel, 2015.
4. Š. Znam i dr., Pogled u povijest matematike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
5. Web resource: L. Bardos, Interesting things to make out of paper; (24. 2. 2016.) http://www.cutoutfoldup.com/409-double-a-cube.php