

BINARNI ŠEŠIRIĆI

Franka Miriam Brückler, Zagreb

Učenici Luka, Mate i Neven po ne znam koji put završili su na produžnoj nastavi iz matematike. Njih trojica žalila su se svojoj nastavnici da su zadatci koje moraju rješavati dosadni i teški pa je ona odlučila ponuditi im sljedeću priliku:

- Ako ovaj neobični zadatak uspješno riješite, sva trojica ćete dobiti dvojke i možete na more!
- Može! – oduševljeno rekoše Luka, Mate i Neven – Kako glasi zadatak?
- Ovako ćemo. Prvo ću vam pokazati o čemu se radi, da budem sigurna da ste sva trojica dobro razumjeli. Nakon toga ćemo „za ozbiljno”.



Ovo je malo zbunilo Luku, Matu i Nevena, ali s druge strane, zvuči obećavajuće – čini se da će zadatak biti težak, ali ne i dosadan. Nastavnica ih je zamolila da pokriju oči tako da ništa ne vide (hm, kakav li je to zadatak iz matematike koji nećemo vidjeti?) i svakome stavila po jedan šeširić na glavu te rekla da otkriju oči. Sada, dakle, svatko vidi kakve šeširiće nose druga dvojica, ali ne vidi svoj (u razredu nema ogledala). Nastavnica kaže:

- Osnovni je zadatak pogoditi boju svog šeširića.
- Kako sad to? – pita Luka.
- Kako mi to što vidim druge šeširiće pomaže da pogodim svoju boju? – pita Mate.
- Pa ovo je igra na sreću, a ne matematika! – kaže Neven.
- Pričekajte tren. Svaki od vas trojice ima šeširić u jednoj od dvije boje, crvenoj ili bijeloj. Nema šeširića u drugim bojama. Boje šeširića koje nosite birane su nasumce – za svakog sam od vas bacila novčić i ako je palo pismo, stavila sam mu bijeli šeširić, a ako je pala glava, crveni. Svaki od vas može birati – ili će pogađati koje je boje njegov šešir ili će šutjeti. Ukoliko ijedan od vas daje krivi odgovor ili ako sva trojica budete šutjeli, nastavljamo normalno s produžnom nastavom. No, ako ijedan od vas pogodi boju svog šešira, sva trojica dobivate dvojke i idemo na praznike!

Kad su se njih trojica počela dogovarati, nastavnica je dodala: – Prije nego napravimo zadatak „za ozbiljno”, smijete se dogovarati, no tijekom „pravog” zadatka ne smijete ni na koji način međusobno komunicirati i nećete čuti što drugi odgovaraju, tj. nakon što se nakratko pogledate, bit ćete odvedeni u tri odvojene sobe.

Luka će: – Hm, očito nije pametno da sva trojica šutimo, onda sigurno nastavljamo s produžnom. Na to će Mate: – Ali, ni ako sasvim nasumce odgovaramo, nije pametno... Recimo da svaki od nas pogađa boju... puno je vjerojatnije da će bar jedan od nas trojice pogriješiti, nego da će pogriješiti samo jedan... Zaključuje Neven: – Da, imate pravo, najbolje da dvojica od nas jednostavno odšute, a jedan od nas će pogađati. I sva se trojica uglas slože: – Da, to je najbolje, tako imamo bar 50 % izgleda da se izvučemo!

O tome koji će od njih pogađati, a koja dvojica šutjeti, dogovorili su se vrlo brzo – bacali su kocku. Mate je prvi dobio šesticu pa će on pogađati, a ostala će dvojica šutjeti. I tako je Mate pogađao – i promašio! Dobro, 50 % izgleda nije bilo baš puno, ali ni malo. Nažalost, njih trojica ipak su bila preslaba u matematici pa su morala nastaviti s produžnom ne znajući da su boljom strategijom mogli priliku brzog početka praznika podići čak na 75 %! Kako? Razmislite prvo na tren sam, a onda čitajte nastavak...



Prvo, jeste li primijetili da u njihovoj strategiji ni jedan ne obraća pozornost na boje šeširića druge dvojice, iako ih smiju vidjeti? Luka, Mate i Neven svoju bi strategiju mogli provesti i zatvorenih očiju. Na prvi pogled čini se beskorisno vidjeti boje šeširića druge dvojice jer su šeširići nasumice birani, ali na drugi pogled...

Pogledajte sljedeću tablicu koja prikazuje sve moguće rasporede boja šeširića. Budući da se boje šeširića biraju nasumce, svi su jednako vjerojatni.

Luka	Mate	Neven	Vjerojatnost
b	b	b	1/8
b	b	c	1/8
b	c	b	1/8
c	b	b	1/8
b	c	c	1/8
c	b	c	1/8
c	c	b	1/8
c	c	c	1/8



Imate li sad ideju kako poboljšati izgleda da Luka, Mate i Neven ranije idu na more? Ako i dalje nemate, nastavite čitati...

U samo dva od osam slučajeva sva trojica će dobiti šeširiće iste boje. Dakle, vjerojatnost da sva trojica *neće* imati šesire iste boje je $6/8 = 75\%$. Jeste li sad „skužili foru“?

Vrlo je jednostavna: Onaj koji vidi da druga dvojica imaju šešire iste boje, tvrdit će da je njegov šešir one druge boje – ako vidi dva bijela šešira, reći će da je njegov crven, i obrnuto. Ako su pak šeširi druge dvojice raznobojni, onda će šutjeti. Samo u četvrtini slučajeva Luka, Mate i Neven morat će ostati na produžnoj – to će biti ako sva trojica pogađaju (tj. ako su sva tri šešira iste boje). U svim drugim slučajevima (vidi tablicu) jedan će šutjeti, a druga će dvojica točno pogoditi svoju boju! Da su Luka, Mate i Neven bili bolji u matematici, možda bi se ovog i dosjetili...

Što ako imamo četvero ili više učenika na produžnoj nastavi? A što ako obje boje šešira nisu jednako vjerojatne, primjerice ako nastavnica zatvorenih očiju za svakog bira jedan od njih sedam, od kojih su tri bijela i četiri crvena? Na ova ćemo pitanja odgovoriti u sljedećem nastavku.

Uz to, vjerovali ili ne, ovaj zadatak sa šeširićima ima veze s ispravljanjem pogrešaka u računalu. Naime, sigurno znate da se informacije u računalu bilježe kao nizovi bitova, tj. nula i jedinica („binarno“) – naši bijeli i crveni šeširići mogu se shvatiti kao nule i jedinice. Gornja tablica je onda popis svih osam mogućih informacija od po tri bita. Ukoliko je pri zapisivanju takve informacije došlo do pogreške na nekom bitu, računalo će ti javiti da je datoteka nečitljiva ili ćeš pak vidjeti nekakvu čudnu sliku ili tekst. Razmišljanjem poput opisanog moglo bi se s razumnom vjerojatnošću procijeniti koji je niz bitova zapravo trebao biti – a takvo razmišljanje može se ugraditi u računalni program. Postoje i bolje varijante, tzv. kodovi za ispravljanje pogrešaka, no o njima jednom drugom prilikom...



Literatura:

1. <http://mathstat.slu.edu/~johnson/public/math/hatproblem.pdf>
2. <http://mathforum.org/library/drmath/view/61834.html>

