DOMINO PLOČICE I 4 × 4 PLOČA – DRUGA IGRA

Maja Starčević, Zagreb

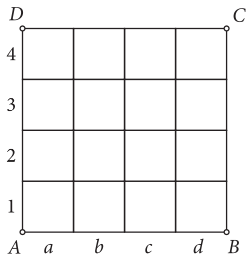
Eva i Petar ponovno su se našli kako bi riješili još neke zadatke s domino pločicama i 4 × 4 pločom. Prema osnovnim pravilima koja je osmislio Petar, svaka pločica koju postave na ploču pokriva točno dva polja, a dvije pločice ne smiju pokrivati isto polje. Pločice su okrenute tako da se ne vide točkice, odnosno da izgledaju jednako.

Eva je na početku današnjega susreta rekla Petru:

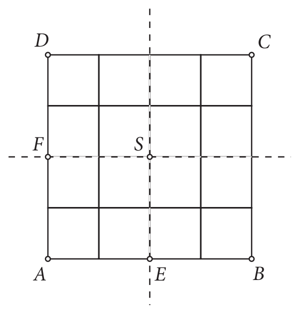
– Imam ideju za još jedan zadatak. Mogli bismo proučiti na koje sve načine možemo popločati čitavu ploču tako da to popločavanje bude simetrično, odnosno da slika na ploči koju dobivamo bude simetrična. Opet ćemo sjesti zajedno s iste strane stola i nećemo zakretati ploču.

– U redu, ali ploča je kvadratna pa bi popločavanje moglo biti simetrično s obzirom na više osi. Trebamo prvo precizirati os ili osi simetrije – kaže Petar. – Predlažem da to za početak budu dva pravca od kojih svaki prolazi kroz polovišta dviju nasuprotnih stranica ploče. Inače, da bismo popločali čitavu ploču, moramo postaviti 8 pločica.

– Označit ćemo polja ploče kao i jučer (Slika 1.). Ono što prvo primjećujem jest da je dovoljno popločati kvadrat *AESF* (Slika 2.), a ostale pločice postaviti zrcaljenjem s obzirom na dvije zadane osi. Pritom sam s *E* i *F* označila redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, a sa *S* sjecište dviju osi simetrije koje je ujedno i sjecište dijagonala kvadrata *ABCD*. Pitanje je samo možemo li kvadrat *AESF* popločati kako god želimo. Drugim riječima, moramo li ga popločati tako da sve pločice budu unutar toga kvadrata ili neke pločice mogu pokrivati samo jedno polje koje je unutar kvadrata.

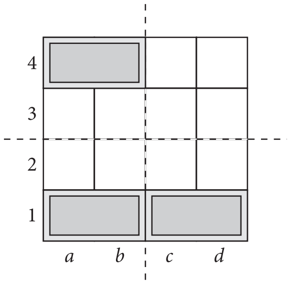


Slika 1.

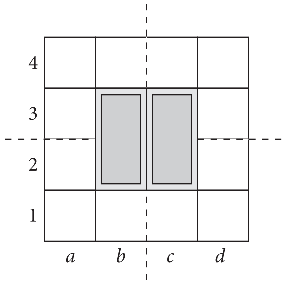


Slika 2.

– Možemo postaviti pločice kako želimo, jer kad zrcalimo bilo koju pločicu s obzirom na neku od naših osi simetrije, dobivamo pločicu na istoj poziciji ili pločicu na nekoj drugoj poziciji koja s početnom pločicom nema zajedničko polje – primijeti Petar. – Npr. pločica $a1 - b1$ zrcaljenjem se s obzirom na naše osi preslika u pločice $c1 - d1$ i $a4 - b4$ (Slika 3.), a one s početnom pločicom nemaju zajedničko polje. S druge strane, pločica $b2 - b3$ preslikava se ili u samu sebe ili u pločicu $c2 - c3$ koja s njom nema zajedničko polje (Slika 4.).

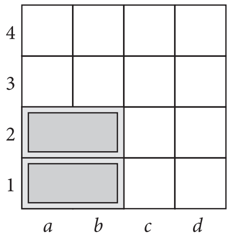


Slika 3.

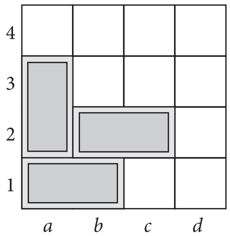


Slika 4.

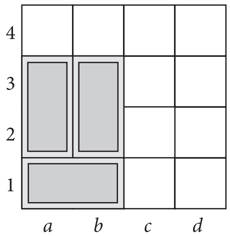
– Ako je tako, onda imamo sljedeće opcije. Polje $a1$ možemo popločati vodoravnom ili okomitom pločicom. Pretpostavimo za početak da je pločica koja pokriva $a1$ vodoravna. Da bismo prekrili kvadrat *AESF*, možemo postaviti jednu pločicu na poziciju $a2 - b2$ (Slika 5.) ili dvije pločice na pozicije $a2 - a3$ i $b2 - c2$ (Slika 6.) ili pak dvije pločice na pozicije $a2 - a3$ i $b2 - b3$ (Slika 7.).



Slika 5.

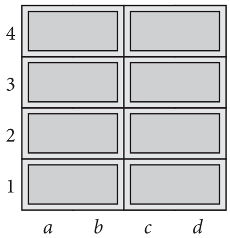


Slika 6.

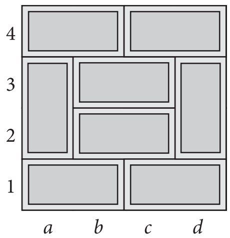


Slika 7.

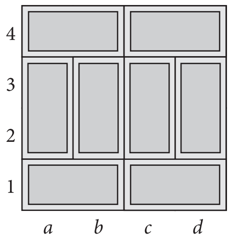
Nakon toga zrcalimo pločice s obzirom na zadane osi i dobivamo popločavanja koja zadovoljavaju zadane uvjete (Slike 8., 9., 10.).



Slika 8.



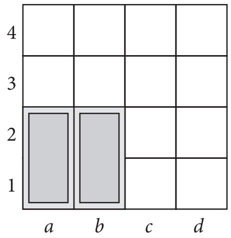
Slika 9.



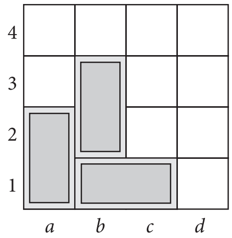
Slika 10.

Matka 102.indd 78 29.11.2017. 7:51:26

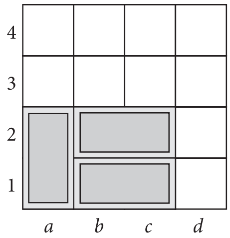
– Sada ćemo vidjeti kako popločati kvadrat *AESF* u slučaju da je pločica koja pokriva polje *a*1 okomita. Imamo opet 3 načina kako to napraviti (Slike 11., 12., 13.).



Slika 11.



Slika 12.



Slika 13.

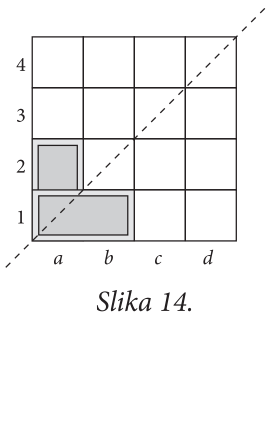
Eva i Petar zrcalili su ovako postavljene pločice preko zadane dvije osi simetrije i uvjerili se da su sva dobivena prekrivanja ploče međusobno različita. Petar je nakon toga zaključio:

– Ukupan broj načina postavljanja pločica u ovom zadatku jednak je 6.

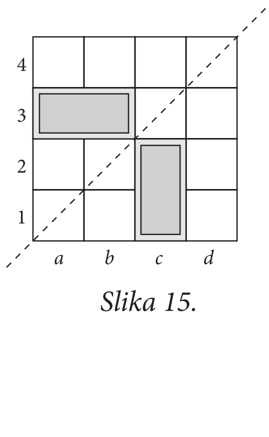
Petra je prethodni zadatak motivirao za postavljanje još jednog zadatka:

– Sad i ja imam ideju. Mogli bismo riješiti sličan problem. Naći ćemo sva postavljanja pločica koja su simetrična s obzirom na obje dijagonale naše ploče. Pritom nije važno da popločamo čitavu ploču. Možemo koristiti i manje od 8 pločica.

– Ovaj put imamo malo drugačiju priču – primijeti Eva. – Ne možemo postaviti nijednu pločicu tako da s nekom od osi simetrije ima zajedničko nešto više od svoga vrha. Pokazat ću ti na primjeru. Pločica *a*1 – *a*2 zrcaljenjem se s obzirom na dijagonalu $\overline{AC}$ preslikava u pločicu *a*1 – *b*1 koja s njom ima zajedničko polje (Slika 14.). S druge strane, pločica *a*3 – *b*3 istu dijagonalu dira samo jednim svojim vrhom i preslikava se u pločicu *c*1 – *c*2, a pločice na tim pozicijama nemaju zajedničko polje (Slika 15.). Ako pločica nema presjek s dijagonalom, onda zrcaljena pločica očito s njom nema zajedničko polje.



Slika 14.



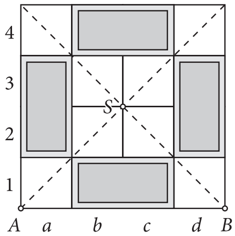
Slika 15.

– I ovaj put ćemo postaviti nekoliko pločica, a ostale pločice ćemo dobiti zrcaljenjem kao i u prošlom zadatku – nadoveže se Petar. – Međutim, ovaj put zrcalimo sve pločice koje prekrivaju neki dio trokuta *ABS* s obzirom na dijagonale ploče. Kao i prije, *S* je sjecište dijagonala kvadrata *ABCD*.

Eva iz toga zaključi:

– Iz svega što smo primijetili proizlazi da pločice koje prekrivaju neki dio trokuta *ABS* u potpunosti pripadaju tome trokutu. Pločicu u taj trokut možemo postaviti samo na jedan način. To je pločica na poziciji *b*1 – *c*1.

– I onda zbog uvjeta simetrije imamo samo jedan način postavljanja. Na ploču trebamo staviti još samo 3 pločice: *d*2 – *d*3, *b*4 – *c*4 i *a*2 – *a*3 (Slika 16.).



Slika 16.

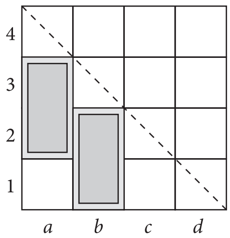
Petar je zatim primijetio još nešto:

– Kako smo pronašli jedno postavljanje pločica koje je simetrično s obzirom na obje dijagonale, imamo i barem jedno postavljanje koje je simetrično samo s obzirom na jednu dijagonalu. Ako postavimo samo taj uvjet, možda ćemo pronaći još neka postavljanja pločica.

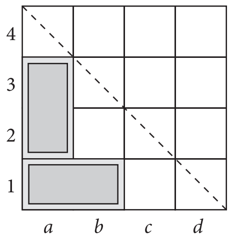
– U redu, tražit ćemo postavljanja simetrična npr. s obzirom na dijagonalu $\overline{BD}$. Prvo ćemo pogledati kako možemo postaviti pločice u trokut *ABD*. Zaključujem, kao i u prethodnom zadatku, da pločice moraju u potpunosti biti unutar trokuta *ABD*. Zrcaljenjem s obzirom na dijagonalu $\overline{BD}$ dobit ćemo kako postaviti ostale pločice. Prvo moramo vidjeti koliko uopće pločica možemo staviti u trokut *ABD*.

– Jednu ili dvije. Očito je da ne možemo staviti više od dvije pločice. Slučaj s jednom pločicom je lagan. Ispisat ću sve moguće položaje pločice: *a*1 – *a*2, *a*2 – *a*3, *b*1 – *b*2, *a*1 – *b*1, *b*1 – *c*1, *a*2 – *b*2.

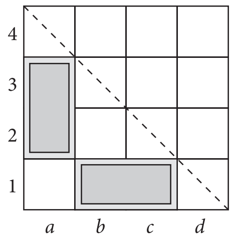
– Ja ću pogledati kako postaviti dvije pločice. Ako želim da mi neka od pločica prekriva polje *a*3, to može biti samo pločica *a*2 – *a*3. Nakon toga možemo postaviti još jednu pločicu u trokut *ABD* na tri načina: *b*1 – *b*2 (Slika 17.), *a*1 – *b*1 (Slika 18.) i *b*1 – *c*1 (Slika 19.).



Slika 17.

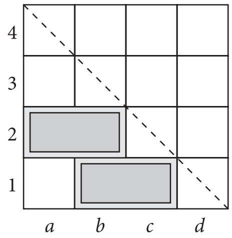


Slika 18.

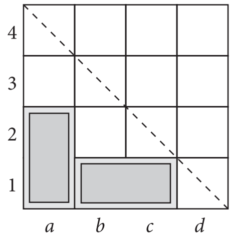


Slika 19.

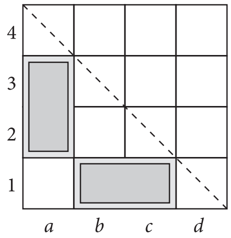
Slično zaključujem i za polje $c1$. Njega možemo prekriti samo pločicom $b1 - c1$, a nakon toga možemo postaviti još jednu pločicu na tri načina: $a2 - b2$ (Slika 20.), $a1 - a2$ (Slika 21.) i $a2 - a3$ (Slika 22.). Dakle, to bi zasad bilo 6 postavljanja.



Slika 20.



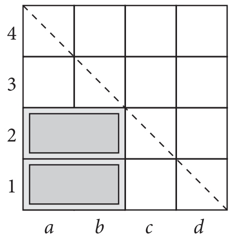
Slika 21.



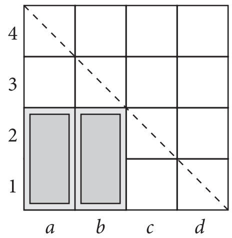
Slika 22.

– Ali Eva, dva su od tih šest postavljanja jednaka. Dakle, imaš ih samo 5.

– Imaš pravo. Sad još moram naći koliko ima načina postavljanja dviju pločica u trokut ABD kod kojih ne prekrivam ni polje $a3$ ni polje $c1$. Dakle, pločice mogu staviti samo u kvadrat $AESF$ (Slika 2.). Takvih je postavljanja očito samo 2 (Slike 23., 24.) pa je ukupan broj načina postavljanja dviju pločica u trokut ABD jednak 7.



Slika 23.



Slika 24.

– Sada ćemo zbrojiti koliko smo načina postavljanja pronašli. Dakle, pločice možemo postaviti na ukupno 6 + 7 = 13 načina.

– Imaš li ideju za još koji zadatak?

– Pa baš i nemam. Ako nešto smislim, reći ću ti sutra u školi.

– I ja ću pokušati nešto smisliti.