NEKE VRSTE DOKAZA U ČAROBMATICI

Jadranka Delač-Klepac, Zagreb

U jednoj smo priči spomenuli kako je važno znati postavljati prava pitanja.

Jednako je važno znati pronaći odgovore na postavljena pitanja, zadatke ili probleme. A da bismo znali pronaći odgovore, treba naučiti misliti, rasuđivati, procjenjivati, zaključivati, poopćavati odnosno generalizirati stvari, sintetizirati, analizirati, znati razlučiti bitno od nebitnoga, naći protuprimjer... Eto, takve se stvari uče u čarobmatičkim školama.

Kako dokazati da je nešto točno ili ispravno?

Prvi dan u čarobmatičkoj školi jedne čarobnjačke školske godine, Baltazar je dočekao svoje učenike s dva crteža na ploči rekavši im da će taj dan malo razgovarati o dokazima. U prijašnje dvije čarobmatičke priče (*Kako dokazati da postoje vilenjaci* i *Priča o čarobnjačkim bankama*) već se spominjao dokaz kontradikcijom – *contradictio ad absurdum*. Upitao ih je sjećaju li se toga dokaza koji će kasnije opet ponoviti.

Jedan mali učenik odgovorio je da se ne sjeća, ali i dodao:

– Ja znam što je to ad absurdum. To je nešto poput slobodnog udarca u boksu ili poput kraja prve četvrtine u trčanju na sto metara... Dakle, nešto što je nemoguće. Ali... ne znam što je to dokaz kontradikcijom.

– *Ok, ok, o tome ćemo malo kasnije* – nasmijao se Baltazar zadavši učenicima sljedeći zadatak.

Zadatak 1.

Zamislite jedan broj.
Dodajte 10.
Podvostručite broj.
Oduzmite 4.
Podijelite s 2.
Oduzmite broj koji ste zamislili.
Koji ste broj dobili?

Primjerice, ako smo zamislili broj 21, po koracima dobivamo:

21
31
62
58
29
8

Dakle, svi ste dobili broj 8. Objasnite zašto je rezultat uvijek broj 8!

Mali školarci-vilenjaci pognuli su glavice, zasjajila su im se čela, a jedan je na ploči ovako objasnio rješenje zadatka pretočivši Baltazarove rečenice u ovakve simbole:

Rješenje:

x
$x + 10$
$2x + 20$
$2x + 16$
$x + 8$
8

– *Ovo je prava čarobmatika*, rekao je Baltazar i odmah nastavio:

– *Koristili ste se brojevima, koristili zakone i svojstva operacija za njihovo računanje, koristili ste se apstrakcijom i simbolima za nepoznatu veličinu i matematičke operacije, te ste tako i dokazali jednu tvrdnju koja uvijek vrijedi. Niste trebali ispitati ovo pravilo na mnogo pojedinačnih primjera.*

Čak i da jeste provjeravali ovu tvrdnju na mnogo, mnogo primjera, to ipak ne bi bio dokaz.

Radili ste algebru i napravili pravi pravcati dokaz!

Algebra je dio matematike koji radi s brojevima i njihovim svojstvima bez da koristimo njihove stvarne vrijednosti. Brojeve zamjenjujemo simbolima: *a, b, c, x, y, z*... i koristimo svojstva koja vrijede za računanje s njima kao što su komutativnost, asocijativnost, distributivnost i druga koja vrijede za aritmetičke operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja.

Ili, možemo reći – algebra je dio matematike koji proučava različite algebarske strukture.

Pojam je nastao u staroindijskoj matematici sa značenjem: umijeće računanja nepoznatim veličinama (dok se aritmetika smatrala umijećem računanja poznatim veličinama). (I. Gusić, Matematički rječnik)

Uz pomoć apstraktnih simbola za brojeve i operacije s njima (kao: +, –, i sl.) te njihovih svojstava i logičkih argumenata dokazali smo da ovo razmišljanje uvijek dovodi do istog rezultata. To je dokaz.

Dokaz je utvrđivanje istinitosti neke matematičke činjenice iz nekih drugih matematičkih činjenica rasuđivanjem po nekim pravilima. Ta pravila proučava grana matematike – matematička logika. (I. Gusić, Matematički rječnik)

Dokaza ima različitih: dokaz protuprimjerom, dokaz računalom, direktni dokaz, indirektni dokaz, dokaz matematičkom indukcijom i još mnogi drugi. Ovi primjeri dokaza susreću se u srednjoj i osnovnoj školi u nastavi matematike.

1. Dokaz protuprimjerom

Primjerice, ako niste sigurni je li točan izraz: $a^2 + b^2 = (a + b)^2$, dovoljno je umjesto a i b u zadani izraz uvrstiti brojeve, $a = 1$ i $b = 2$: $1^2 + 2^2 = 5$, $(1 + 2)^2 = 9$, dakle dobivamo da je $5 = 9$, što očito nije točno. Znači, gornji izraz nije istinit.

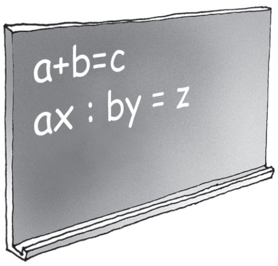
2. Dokaz uz pomoć računala

Dokaz da je broj $2^{756839} - 1$ prost (najveći prosti broj do 1992. godine) proveden je računalom.

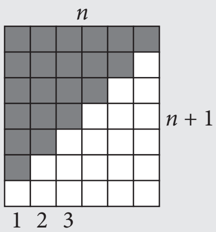
3. Direktan dokaz (ili izravni ili dokaz bez riječi, koji možemo vidjeti u primjeru 1.)

Primjer 1. Dokaz sa slike (koji je Baltazar nacrtao na ploči):

U prvom primjeru brojimo neosjenčane kvadratiće, a u drugom sve.



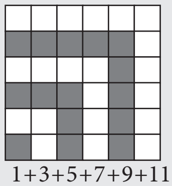
a)



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

b)



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Primjer 2. Izravni dokaz koji koristi prethodno usvojeno znanje (služimo se formulom iz prethodnog primjera 1a)):

Dokažite: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Dokaz: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=[1+2+3+4+\ldots+(2n-1)+2n]-[2+4+6+\ldots+2n]=$

$$= \frac{2n(2n + 1)}{2} - 2 \cdot (1+2+3+\ldots+n) = n(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = n^2$$

4. Indirektan dokaz (ili neizravni dokaz)

Najčešći tipovi indirektnog dokaza su:

a) dokaz kontradikcijom (contradictio ad absurdum)

b) dokaz po kontrapoziciji

Sud je smislena izjava (rečenica, iskaz, izreka, tvrdnja) koja je istinita ili neistinita, ali ne može biti oboje.

a) Dokaz kontradikcijom zasniva se na ekvivalenciji (jednakovrijednosti) sudova

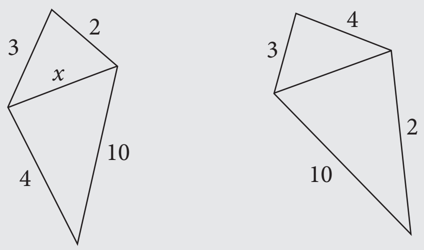
$$P \Rightarrow Q \quad \text{i} \quad (P \ \ i \ \ \neg Q) \Rightarrow F$$

Gdje sud $P \Rightarrow Q$ čitamo: „Ako je P, tada je Q” ili „Iz P slijedi Q”; dok sud $\neg Q$ čitamo „non Q” ili negacija suda Q.

Primjer 1. Dokažimo da ne postoji četverokut čije su duljine stranica jednake 2, 3, 4 i 10 cm.

Dokaz: pretpostavimo da takav četverokut postoji. Dakle, želimo dokazati tvrdnju: $(P \ \ i \ \ \neg Q) \Rightarrow F$.

Tada bi on izgledao ovako:



Tada vrijedi:

$10 < 4 + x < 4 + (2 + 3) \Rightarrow 10 < 9$ ili $10 < x + 2 < (3 + 4) + 2 \Rightarrow 10 < 9$

Već je i Euklid tvrdio da je zbroj duljina dviju stranica u trokutu veći od duljine preostale stranice. Dakle, takav četverokut ne postoji.

P, Q i F su sljedeći sudovi:

P: Zadane su četiri dužine s duljinama od 2, 3, 4 i 10 cm.

Q: Zadane četiri dužine **ne** tvore četverokut.

$\neg Q$: je negacija od Q (Od zadanih četiriju dužina može se načiniti četverokut)

$P \ \ i \ \ \neg Q$: Zadane su četiri dužine s duljinama od 2, 3, 4, 10 cm i one tvore četverokut.

Matka 102.indd 91 29.11.2017. 7:51:27

$P \Rightarrow Q$: Ako su zadane četiri dužine sa stranicama duljina 2, 3, 4 i 10 cm, tada one **ne** tvore četverokut (tj. ne postoji četverokut kojemu su duljine stranica 2, 3, 4 i 10 cm).

F: lažni sud koji se dobije kao posljedica pretpostavke (F je u ovom slučaju tvrdnja da je 10 manje od 9)

b) Dokaz po kontrapoziciji zasniva se na ekvivalentnosti (jednakovrijednosti) sudova:

$P \Rightarrow Q$ i $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Izjava ($\neg Q \Rightarrow \neg P$) zove se obrat ili kontrapozicija od ($P \Rightarrow Q$).

Primjer 2. Dokažite da je, ako je x^2 neparan prirodni broj, tada i x neparan.

Neka je P tvrdnja: x^2 je neparan

Analogno s Q označimo: x je neparan.

Dokaz: Pretpostavimo da je x paran te da postoji prirodni broj y tako da je $x = 2y$. Tada je: $x^2 = (2y)^2 = 4y^2 = 2 \cdot (2y^2)$, što znači da je x^2 paran.

Dokazali smo ($\neg Q \Rightarrow \neg P$), što znači da vrijedi: ($P \Rightarrow Q$).

5. Dokaz matematičkom indukcijom:

Ovom se metodom dokazuju tvrdnje koje ovise o prirodnim brojevima, a sastoji se u sljedećem:

Ako neka tvrdnja vrijedi za $n = 1$, i ako iz pretpostavke da vrijedi za $n = k$ slijedi da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, onda tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Dakle, dokaz neke tvrdnje matematičkom indukcijom provodimo u dva koraka:

– U prvom koraku provjerava se vrijedi li tvrdnja za neki broj n_0. Najčešće je $n_0 = 1$.

– U drugom koraku dokazuje se kako pretpostavka da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj $n = k$, povlači da vrijedi i za sljedeći broj $n = k + 1$.

  Ako to dokažemo, možemo reći da tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq n_0$.

Primjer 1: Dokažimo koristeći matematičku indukciju da vrijedi (jedan od zadataka koje smo dokazali direktnim dokazom sa slike – primjer 1b)):

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (*)$$

Prvi korak indukcije:

Uvrstimo li $n = 1$ u obje strane od (*), dobit ćemo da je $1 = 1$, što znači da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Drugi korak indukcije:

Pretpostavimo da tvrdnja (*) vrijedi za $n = k$:

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$.

Koristeći ovu pretpostavku dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$:

$[1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)]+[2(k + 1) - 1] = k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$,

dakle, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Literatura:

1. Phillip J. Davis, Reuben Hersh: *The Mathematical experience*, Penguin Books, 1981.
2. Mladen Vuković: *Indirektni dokazi*, MFL; 1992.-3, 3-4/172.
3. Jadranka Delač-Klepac: *Matematički dokaz u osnovnoj i srednjoj školi*; Zbornik radova 6. Susreta nastavnika matematike 2002., HMD
4. I. Gusić: *Matematički rječnik*, Element, 1995.

SVOJIM ČITATELJIMA I SURADNICIMA
ŽELIMO SRETAN BOŽIĆ
I USPJEŠNU NOVU 2018. GODINU!

UREDNIŠTVO MATKE