MATEMATIKA TRKAĆIH STAZA

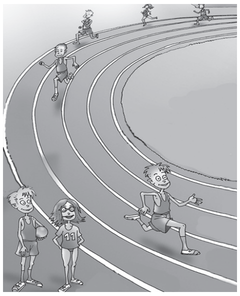
Franka Miriam Brückler, Zagreb

Vjerujem da svi znate kako izgleda uobičajena trkaća staza koju trkači u utrci na 400 metara trebaju jednom obići:

Unutrašnji rub sastoji se od dva paralelna ravna dijela duljine 84.39 m i dva polukružna dijela polumjera 36.50 m. Dakle, unutrašnji je rub duljine

$$2 \cdot 84.38 \text{ m} + 2\pi \cdot 36.50 \text{ m} = 398.12 \text{ m}$$

(zaokruženo na dvije decimale, tj. na centimetar). Pritom grčko slovo π (čitaj: pi) predstavlja matematičku konstantu koja iznosi približno 3.14159 i koja se koristi u raznim računima vezanim za krug i kružnicu. Posebno, ono što je nama u gornjem računu trebalo, jest činjenica da je opseg kruga jednak točno 2π puta polumjer.



Dobili smo manje od 400 metara, zar ne? No, trkač na unutrašnjoj stazi ne trči točno po tom rubu, nego oko 30 cm od njega. Time je njegova stvarna staza produljena za

$$2\pi \cdot 30 \text{ cm} = 188.5 \text{ cm},$$

dakle trkač na unutrašnjoj stazi trči točno 400 m. No, što s onima koji ne trče na unutrašnjoj stazi? Očito su njihove staze dulje i zato, da bi svi trkači imali za pretrčati istu udaljenost od 400 metara, svaki od njih kreće malo pomaknut prema naprijed u odnosu na susjeda koji je bliži sredini terena. Koliki je pomak potreban da bi trka bila pravedna?

Pojedine trake su, prema pravilima, širine 1.22 m. Očigledno ne trebamo uzimati u obzir ravne dijelove traka jer su oni svi jednako dugi. Stoga gledamo osam duljina kružnica koje određuju unutrašnje rubove staza. Duljine tih kružnica njihovi su opsezi, a oni će biti određeni polumjerima koji su svaki za 1.22 m veći od prethodnog. Dakle, svaka sljedeća traka ima unutrašnji rub dulji za

$$2\pi \cdot 1.22 \text{ m} = 7.67 \text{ m}.$$

No, u pravilima je propisan pomak 7.04 m, a ne 7.67 m. Je li greška u pravilima ili možete otkriti razlog? Ako ga sami ne otkrijete, otkrit ćemo ga mi – ali u sljedećem broju Matke!

A sad **odgovori na pitanja iz prošlog broja**, vezana za priču o binarnim šeširićima.

Da je na produžnoj nastavi bilo četvero učenika, mogli su zadržati istu vjerojatnost uspjeha držeći se strategije za troje, tj. tako da svaki od njih ignorira jednog od onih koje vidi i odlučuje prema ostaloj dvojici. Za petero i šestero istom se takvom strategijom šanse malo pokvare. Za sedmero će pak trebati odlučivati temeljem pogledanih šest boja. Općenito, ako je broj učenika za 1 manji od neke potencije[1] broja 2, kao što je u članku bilo $3 = 2^2 - 1$ ili sad $7 = 2^3 - 1$, to je najpovoljnija situacija – svaki učenik treba gledati sve ostale šešire i ako su oni iste boje pretpostavlja da je vlastiti šešir one druge boje, a inače šuti. Na taj način vjerojatnost produžne nastave bit će 1 podijeljen sa spomenutom potencijom od 2 (za troje učenika $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 25$ %, za sedmero $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 12.5$ % itd. sve manja). Za ostale brojeve učenika šanse su nešto lošije, a strategija je ponašati se prema sljedećem manjem od brojeva tipa potencija broja 2 minus 1. Primjerice, ako imamo 17 učenika, oni bi se trebali ponašati kao da ih je $15 = 2^4 - 1$, tj. svaki bi trebao ignorirati dvojicu od onih koje vidi i gledati ostalih 14.

S druge strane, ako je i dalje troje učenika, ali nisu obje boje šešira jednako vjerojatne, stvar je puno nepreglednija. Ako nastavnica zatvorenih očiju za svakog bira jedan od 7 šešira, od kojih su 3 bijela i 4 crvena, vjerojatnost da neki učenik ima bijeli šešir bila bi 3/7 (3 od 7 šešira su bijeli), a da ima crveni 4/7. Množenjem pojedinačnih vjerojatnosti dobije se tablica vjerojatnosti za 3 bijela i 4 crvena šešira:

Luka	Mate	Neven	3 bijela, 4 crvena
b	b	b	27/343 (oko 7.9 %)
b	b	c	36/343 (oko 10.5 %)
b	c	b	36/343 (oko 10.5 %)
c	b	b	36/343 (oko 10.5 %)
b	c	c	48/343 (oko 14 %)
c	b	c	48/343 (oko 14 %)
c	c	b	48/343 (oko 14 %)
c	c	c	64/343 (oko 18.6 %)

Dakle, ako itko vidi dva istobojna šešira, s visokom vjerojatnosti (73.5 %) on ima šešir one druge boje, tako da je opet dobra ista strategija kao i prije. Ipak, treba paziti. Primjerice, ako bi nastavnica raspolagala s 2 bijela i 5 crvenih šešira, stvar je malo drugačija. Prvo, tad je nemoguće da sva trojica imaju bijeli šešir. Stoga, ako dvojica imaju bijeli, treći sigurno ima crveni šešir, tj. ako itko vidi dva bijela šešira, *siguran* je da je njegov crveni. Ako pak vidi dva raznobojna ili pak dva crvena šešira, moguće je da on ima ili bijeli ili crveni. Ako bi se držali iste strategije kao prije, jedina varijanta u kojoj bi morali ići na produžnu nastavu je ako sva trojica imaju crvene šešire, jer tad bi sva trojica dala krivi odgovor. No taj slučaj ima sad nešto veću vjerojatnost (125/343). Dakle, ako boje šešira nisu jednako vjerojatne, ista strategija, ovisno o brojevima šešira na raspolaganju vjerojatnost oslobađanja od produžne nastave će se mijenjati, ali ni u kojem slučaju neće biti veća nego ako su obje boje jednako vjerojatne.

[1]Potencije broja 2 su rezultati množenja 2 samog sa sobom. Oznaka 2^n označava da imamo n dvojki pomnoženih samih sa sobom, primjerice $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.