Matka 26 (2017./2018.) br. 102

MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

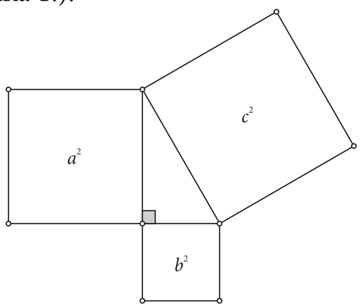
RASTAVLJANJE I SASTAVLJANJE KVADRATA

U ovom tekstu razmotrit ćemo kako geometrijskim postupkom od više kvadrata složiti jedan i obrnuto.

Stari matematičari nisu imali razvijene numeričke alate nego su potrebne račune provodili geometrijskim konstrukcijama, tj. uporabom ravnala i šestara. I u takvim problemima očitovala se domišljatost starih matemagičara.

Ilustracije radi spomenimo kako su od dva kvadrata duljina stranica a i b konstruirali kvadrat površine jednake zbroju njihovih površina.

Pitagorin poučak tvrdi da je $a^2 + b^2 = c^2$ pa su matemagičari na katetama a i b pravokutnog trokuta konstruirali kvadrate površine a^2 i b^2, a na hipotenuzi kvadrat površine c^2. (Slika 1.).



Slika 1.

Ova se konstrukcija može uporabiti u problemu koji traži da se veći kvadrat rastavi na dva manja kvadrata. U tom nam slučaju još treba i Talesov poučak o obodnom kutu.

Rastavljanje i sastavljanje kvadrata

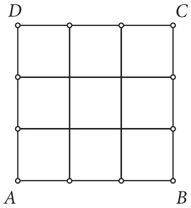
Razmotrit ćemo tzv. problem keramičkih pločica, tj. kako rezati keramičke pločice da bi se dobili kvadrati za popločavanje.

Primjer. *Rastavimo kvadrat na nekoliko jednakih kvadrata.*

Arapski matematičar **Abû'l-Wefâ** (940. – 998.) riješio je taj problem razmatrajući sljedeće slučajeve:

1° Duljina stranice $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ jednaka je a, tj. $|AB| = a = \sqrt{n}$.

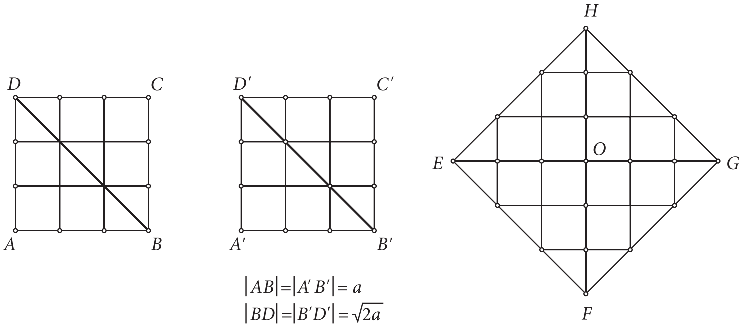
Na slici 2. je $n = 3^2$, odnosno $a = 3$.



Slika 2.

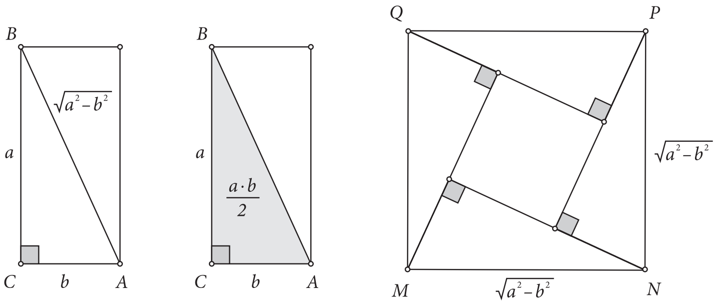
Na ovaj se način dijeli za svaki $n = a^2$.

2° Ako su dana 2 jednaka kvadrata, onda se oni podijele dijagonalom, a od 4 pravokutna trokuta složi se veći kvadrat (Slika 3.).



Slika 3.

3° Ako su dana 2 sukladna pravokutnika cjelobrojnih duljina stranica a i b $a > b$, onda se oni podijele dijagonalom na 4 pravokutna trokuta. Ti se trokuti slože kao na Slici 4.



Slika 4.

Račun pokazuje da je

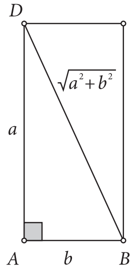
$$p(MNPQ) = a^2 + b^2$$

jer je zbroj površina 4 trokuta i unutarnjeg kvadrata jednak površini većeg kvadrata, tj. vrijedi

$$4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2$$

4° Zadana su dva kvadrata površine a^2 i b^2, $a > b$, $a, b \in N$.

Konstruirajmo pravokutnik $ABCD$ sa stranicama duljine a i b. Podijelimo ga dijagonalom BD (Slika 5.).



Slika 5.

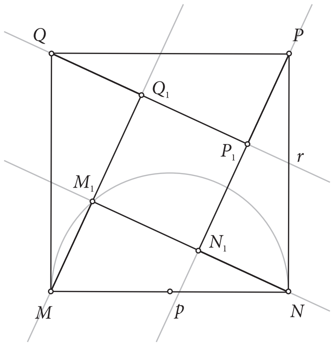
Konstruirajmo kvadrat $MNPQ$ površine $a^2 + b^2$, tj. duljine stranice

$$|MN| = |BD| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Na polukružnici čiji je promjer jednak $|MN|$ nacrtajmo točku M_1 tako da je $|MM_1| = b$.

Nacrtajmo pravac p točkom P tako da je $p \parallel MM_1$ te pravac r točkom Q tako da je $r \parallel M_1N$.

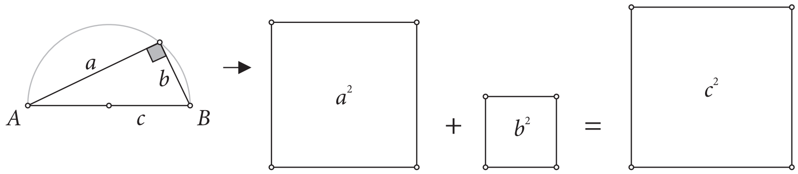
Pravci p i M_1N sijeku se u točki N_1 pravac r siječe pravac p u točki P_1 i pravac MM_1 siječe pravac r u točki Q_1 (Slika 6.).



Slika 6.

Trokuti MM_1N, i NN_1P, PP_1Q i QQ_1M pravokutni su trokuti sa stranicama a, b i $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, a četverokut $M_1N_1P_1Q_1$ je kvadrat sa stranicom $a - b$.

Ova konstrukcija omogućuje i obrat, tj. ako je zadan kvadrat duljine stranice c, onda se on može rastaviti na dva kvadrata zadane duljine a, $(a < c)$ i kvadrat duljine $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.



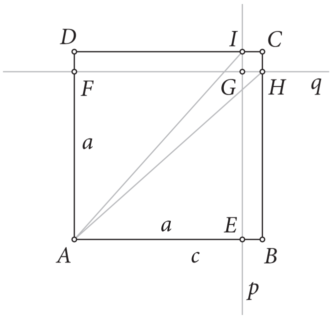
Slika 7.

Ovaj se problem može riješiti na drugi način.

Nacrtamo redom točke E i F na stranicama AB i AD kvadrata $ABCD$ tako da je $|AE| = |AF| = a$ (Slika 8.).

Točke E i F definiraju pravce p i q tako da je $p \parallel AD$ i $q \parallel AB$.

Označimo točke G, H i I tako da je $\{G\} = p \cap q$, $\{H\} = BC \cap q$ i $\{I\} = CD \cap p$.



Slika 8.

Pravokutnici $ABHF$ i $AEID$ podijeljeni su dijagonalama AH i AI na 4 pravokutna trokuta sa stranicama a, c i $d = \sqrt{a^2 + c^2}$.

Ova 4 pravokutna trokuta i kvadrat $GHCI$ sa stranicom $c - a$ definiraju kvadrat sa stranicom d.

Zadatak. *Sastavite kvadrat od n sukladnih kvadrata gdje je n neki prirodan broj.*

Znamo da je francuski matematičar **Pierre de Fermat** (1601. – 1665.) tvrdio da je kvadrat svakog prirodnog broja zbroj 2, 3 ili 4 kvadrata.

Ovaj je poučak dokazao francuski matematičar **Joseph Louis Lagrange** (1736. – 1813.).

Poučak. *(poučak o četiri kvadrata) Svaki prirodan broj n može se prikazati u obliku zbroja kvadrata četiri cijela broja, tj. u obliku*

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,\ a, b, c, d \in Z.$$