Grafički prikaz jedne klase jednadžbi s apsolutnim vrijednostima

Maja Starčević[1]

Ako je zadana jednadžba nekog skupa u ravnini, taj skup u pravilu ne možemo posve precizno nacrtati samo na temelju nekih karakterističnih točaka. Iznimka je npr. jednadžba oblika $ax+by+c=0$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 \neq 0$. Takva jednadžba opisuje pravac, a za njegovo crtanje dovoljno je poznavati samo dvije točke koje zadovoljavaju jednadžbu. U radu [1] pokazano je kako se i skup zadan jednadžbom oblika

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \,|\, a_i x + b_i \,| - y = 0\,, \tag{1}$$

pri čemu su $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i, c_i \neq 0$, može nacrtati poznavajući samo nekoliko točaka koje zadovoljavaju jednadžbu.

Ponovimo ukratko postupak. Definiramo funkciju f s

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \,|\, a_i x + b_i \,|.$$

Neka je $\alpha_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$, $i = 1,\ldots,n.$ Pretpostavljamo radi jednostavnosti zapisa da je $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i = 1,\ldots,n-1.$ Tada je skup opisan jednadžbom (1) jednak grafu funkcije f i možemo ga nacrtati pomoću točaka $\left(\alpha_i, f\left(\alpha_i\right)\right)$, $i = 1,\ldots,n$ te točaka $\left(\alpha_0, f\left(\alpha_0\right)\right)$ i $\left(\alpha_{n+1}, f\left(\alpha_{n+1}\right)\right)$ takvih da vrijedi $\alpha_0 < \alpha_1$ i $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. Skup je jednak uniji dužina kojima su krajnje točke $\left(\alpha_i, f\left(\alpha_i\right)\right)$ i $\left(\alpha_{i+1}, f\left(\alpha_{i+1}\right)\right)$ za $i = 1,\ldots,n-1$, polupravca s početnom točkom $\left(\alpha_1, f\left(\alpha_1\right)\right)$ koji prolazi točkom $\left(\alpha_0, f\left(\alpha_0\right)\right)$ i polupravca s početnom točkom $\left(\alpha_n, f\left(\alpha_n\right)\right)$ koji prolazi točkom $\left(\alpha_{n+1}, f\left(\alpha_{n+1}\right)\right)$.

Sličan pristup želimo primijeniti i na skupove zadane jednadžbama oblika

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \,|\, a_i x + b_i \,| = \sum_{j=1}^{m} f_j \,|\, d_j y + e_j \,|, \tag{2}$$

[1]Maja Starčević, PMF – Matematički odsjek, Zagreb

pri čemu su $a_i, b_i, c_i, d_j, e_j, f_j \in \mathbb{R},\ a_i, c_i, d_j, f_j \neq 0$.

Označimo s P skup točaka, odnosno uređenih parova (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu (2). Želimo odrediti neki skup točaka koji je podskup od P na temelju kojeg možemo rekonstruirati izgled cijelog skupa P.

Prvo definiramo $\alpha_i = -\frac{b_i}{a_i}$ za $i = 1, ..., n$ te $\beta_j = -\frac{e_j}{d_j}$ za $j = 1, ..., m$. Sada podijelimo ravninu pravcima $x = \alpha_i$ i $y = \beta_j$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$. Te ćemo pravce u nastavku zvati kritičnim pravcima. Nakon toga odredimo točke koje zadovoljavaju jednadžbu (2) i leže na kritičnim pravcima. Njih ćemo zvati kritičnim točkama.

Definiramo i funkcije određene lijevom i desnom stranom jednadžbe:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \,|\, a_i x + b_i \,|,$$
$$g(y) = \sum_{j=1}^{m} f_j \,|\, d_j y + e_j \,|.$$

Da bismo odredili kritične točke na pravcu $x = \alpha_i$, tražimo sve y takve da je $g(y) = f(\alpha_i)$. Vrijednosti možemo ponekad lako očitati s grafa funkcije g. Da bismo nacrtali taj graf, dovoljno je odrediti $m + 2$ točke toga grafa kako je objašnjeno na početku rada. Za svaki tako dobiveni y ucrtavamo točku (α_i, y).

Analogno tražimo kritične točke na pravcu $y = \beta_j$. Preciznije, tražimo sve x takve da je $f(x) = g(\beta_j)$. Za dobivene x ucrtavamo točke (x, β_j).

Pravci $x = \alpha_i$ i $y = \beta_j$, ako su svi međusobno različiti, dijele ravninu na $(n + 1)(m + 1)$ skupova koji mogu biti ograničeni i neograničeni. Označimo uniju svih takvih skupova s Ω. Pritom pretpostavljamo da svaki skup iz Ω sadrži i svoj rub, odnosno pretpostavljamo da je zatvoren.

U nastavku ćemo objasniti kako se u svakom od skupova iz Ω, na temelju kritičnih točaka koje sadrži na svom rubu, mogu odrediti sve točke koje zadovoljavaju zadanu jednadžbu (2).

Neka je dakle S iz Ω. Primijetimo da se za sve točke $(x, y) \in S$ na isti način oslobađamo apsolutnih zagrada u jednadžbi te ju pritom pojednostavljujemo do jednadžbe oblika

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Pritom, ako je $A = B = 0$, onda u slučaju da je $C = 0$ sve točke iz S zadovoljavaju jednadžbu (3), odnosno jednadžbu (2). Ako je $C \neq 0$, ne postoji točka iz S koja zadovoljava jednadžbu (2).

Ako je barem jedan od brojeva A i B različit od nule, dobivamo jednadžbu nekog pravca te u S crtamo presjek toga pravca sa skupom S. Ako je S ograničen, odnosno pravokutnik, presjek tog pravca sa S je ili neprazan, ili točka koja je jednaka vrhu pravokutnika S, ili dužina koja se može podudarati s jednom stranicom pravokutnika ili imati krajnje točke na dvije različite stranice pravokutnika S. Ako je S neograničen, presjek je ili neprazan, ili točka koja je jednaka vrhu ruba skupa S, ili dužina, ili je presjek jednak polupravcu koji može pripadati rubu od S, te mu je pritom početna točka u vrhu tog ruba, ili može prolaziti kroz unutrašnjost od S, a početna mu je točka na rubu od S.

Presjek traženog skupa P i skupa S nacrtat ćemo stoga na temelju kritičnih točaka koje se nalaze na rubu skupa S. Preciznije, vrijede sljedeća svojstva:

1. Ako nema kritičnih točaka na rubu od S, onda je presjek neprazan.
2. Ako su sve točke ruba od S kritične točke, onda je presjek čitav S.
3. Ako kritične točke čine dužinu, onda je presjek jednak toj dužini.
4. Ako kritične točke čine polupravac, onda je presjek taj polupravac.
5. Ako se na rubu od S nalaze samo dvije kritične točke, presjek je dužina kojoj su to krajnje točke.
6. Ako je S ograničen i na rubu od S imamo samo jednu kritičnu točku, onda je ta točka presjek.
7. Ako je S neograničen i na njegovom rubu imamo samo jednu točku, onda imamo dvije mogućnosti; ili je samo ta točka presjek (moguće je samo ako se ta točka nalazi u vrhu ruba skupa S), ili je presjek polupravac koji počinje u toj kritičnoj točki i nije podskup ruba skupa S. Stoga moramo provjeriti postoji li neka točka iz unutrašnjosti od S koja pripada P. Konkretno, odaberemo proizvoljnu odgovarajuću koordinatu točke skupa S te iz jednadžbe (2) pokušamo naći drugu koordinatu. Koordinatu odabiremo tako da pripadni polupravac ne siječe još neki od kritičnih pravaca jer bismo onda imali dvije kritične točke na rubu skupa S.

Prethodno opisani postupak pokazat ćemo na nekoliko primjera.

Primjer 1. Nacrtat ćemo skup zadan jednadžbom

$$|x-2|=|y-3|.$$

Rješenje.

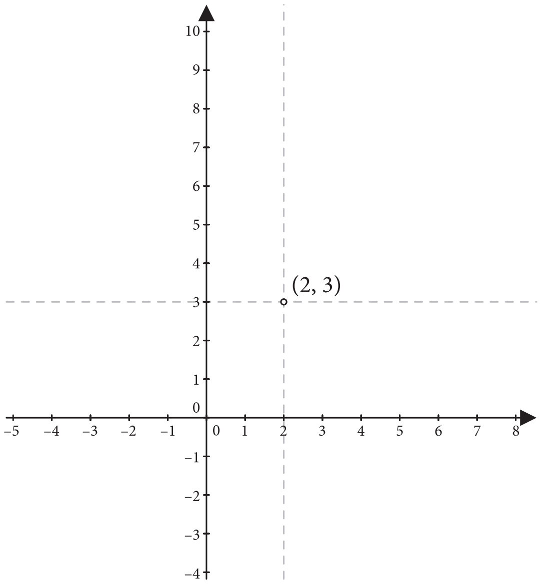
Prvo primijetimo da imamo dva kritična pravca $x = 2$ i $y = 3$. Prema tome, skup Ω je unija sljedećih skupova:

$$(-\infty,2]\times(-\infty,3],\ (-\infty,2]\times[3,\infty),\ [2,\infty)\times(-\infty,3],\ [2,\infty)\times[3,\infty).$$

Tražimo prvo kritične točke na pravcu $x = 2$. Iz jednadžbe slijedi da je $|y-3|=0$, pa je $y = 3$. Dakle, (2, 3) je jedna kritična točka zadane jednadžbe.

Tražimo i kritične točke na pravcu $y = 3$. Sada iz jednadžbe dobivamo $|x-2|=0$ odnosno $x = 2$ te opet dobivamo točku (2, 3).

Dakle, (2, 3) jedina je kritična točka (slika 1) i nalazi se u vrhu ruba svakog od skupova iz Ω.

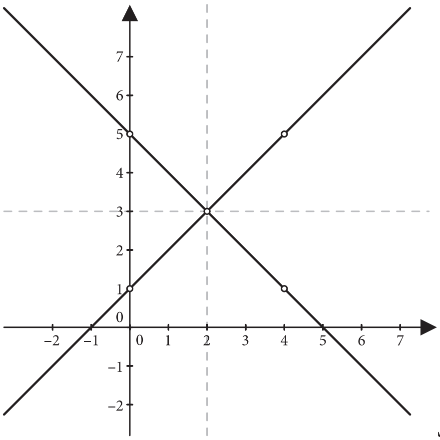


Slika 1.

U svakom od skupova iz Ω prema svojstvu 7. crtamo ili točku (2, 3) ili polupravac koji počinje u toj točki. Ispitat ćemo stoga postoji li u tim skupovima još neka točka koja zadovoljava zadanu jednadžbu.

Odaberimo npr. $x = 0$. Tražimo prema tome y takav da je $|y-3|=2$. Lako je vidjeti da je tada $y = 1$ ili $y = 5$. Neka je sada $x = 4$. Imamo opet $|y-3|=2$, što opet vrijedi za $y = 1$ ili $y = 5$.

Spojimo li kritičnu točku s dobivenim točkama (0, 1), (0, 5), (4, 1) i (4, 5), dobit ćemo četiri polupravca i time je zadani skup točaka određen (slika 2). Lako je vidjeti da se taj skup zapravo sastoji od dva pravca, $y = x + 1$ i $y = -x + 5$.



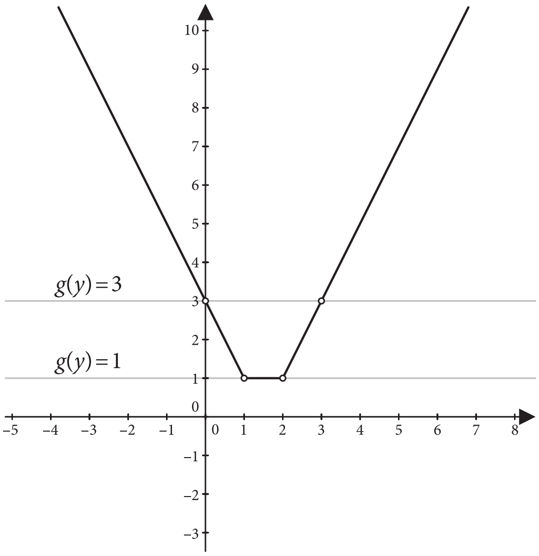
Slika 2.

Primjer 2. Sada crtamo skup zadan s

$$|x-1|+|x-2|=|y-1|+|y-2|.$$

Rješenje.

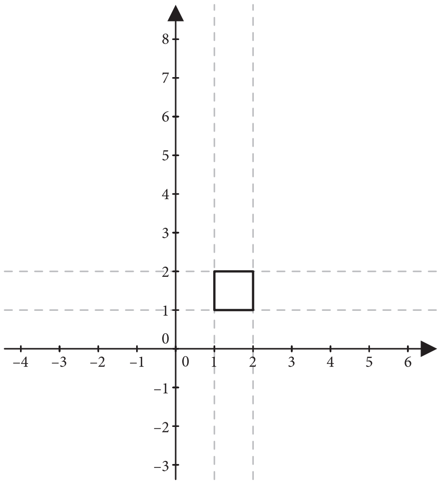
Podijelimo ravninu kritičnim pravcima $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$. Prvo tražimo sve točke zadanog skupa na pravcu $x = 1$. Uvrštavanjem u jednadžbu skupa dobivamo $|y-1|+|y-2|=1$. Nacrtamo graf funkcije $g(y)=|y-1|+|y-2|$ (slika 3), pri čemu smo istaknuli točke koje smo koristili za crtanje grafa. S grafa možemo očitati da jednakost $g(y)=1$ vrijedi za $y\in[1,2]$. I za $x = 2$ dobivamo istu jednakost pa konačno na dva promatrana kritična pravca dobivamo po jednu dužinu sastavljenu od kritičnih točaka. Preciznije, radi se o dužinama $\{1\}\times[1,2]$ i $\{2\}\times[1,2]$.



Slika 3.

Analogno, uvrštavanjem $y = 1$, $y = 2$ dobivamo $|x-1|+|x-2|=1$, iz čega očitavanjem na analognom grafu slijedi $x \in [1,2]$. Prema tome, i sve točke dužina $[1,2]\times\{1\}$ i $[1,2]\times\{2\}$ kritične su točke jednadžbe.

Konačno zaključujemo da kritične točke čine rub kvadrata $[1,2]\times[1,2]$ (slika 4) pa čitav kvadrat, prema svojstvu 2., pripada traženom skupu P.



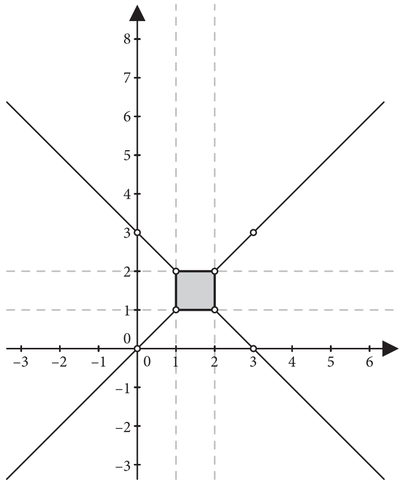
Slika 4.

Nadalje, skup kritičnih točaka koje pripadaju skupu $(-\infty,1]\times[1,2]$ iz Ω je dužina $\{1\}\times[1,2]$ pa je ona presjek tog skupa s P (prema svojstvu 3.). Analogno je to dužina $[1,2]\times\{1\}$ za skup $[1,2]\times(-\infty,1]$, dužina $\{2\}\times[1,2]$ za skup $[2,\infty)\times[1,2]$ te dužina $[1,2]\times\{2\}$ za skup $[1,2]\times[2,\infty)$.

Preostaje naći presjek skupa P s neograničenim skupovima iz Ω. Svaki takav skup S sadrži samo jednu kritičnu točku koja se nalazi u vrhu ruba tog skupa. Prema svojstvu 7. ili je ta kritična točka presjek skupova S i P ili je presjek polupravac koji započinje u toj kritičnoj točki, i nije podskup ruba od S. Dakle, potrebno je ispitati postoji li neka točka u unutrašnjosti skupa S koja je i u P.

Uvrstimo npr. $x = 0$ u zadanu jednadžbu. Imamo $g(y)=|y-1|+|y-2|=3$ pa iz pripadnog grafa (slika 3) očitamo da su rješenja $y = 0$ i $y = 3$. Iste vrijednosti dobivamo i za $x = 3$. Prema tome, točke (0, 0), (0, 3), (3, 0), (3, 3) pripadaju skupu P. Dakle, u svakom neograničenom skupu iz Ω odredili smo po još jednu točku iz P pa u tom skupu crtamo polupravac.

Konačno, traženi skup je unija kvadrata i četiriju polupravaca (slika 5).



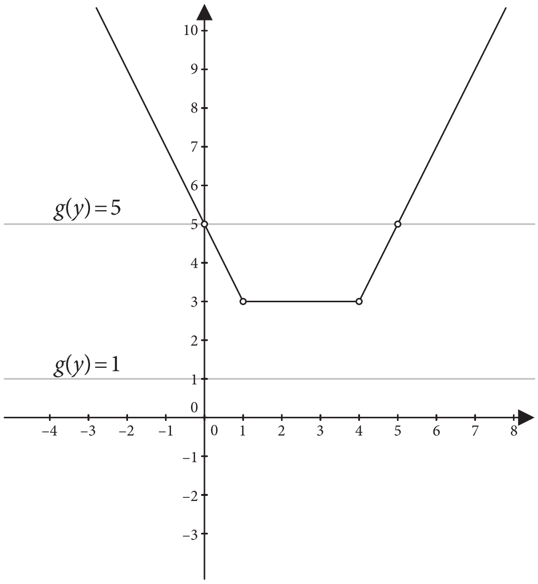
Slika 5.

Primjer 3. Opisat ćemo i skup točaka zadan s

$$|x-2|+|x-3|=|y-1|+|y-4|.$$

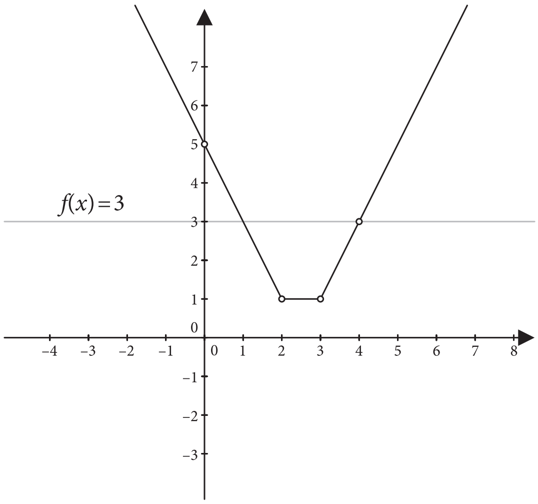
Rješenje.

Kritični pravci su $x = 2$, $x = 3$ te $y = 1$ i $y = 4$. Za $x = 2$ i $x = 3$ imamo $g(y)=|y-1|+|y-4|=1$. Kako jednadžba $g(y)=1$ nema rješenja (slika 6), na tim kritičnim pravcima nema kritičnih točaka.



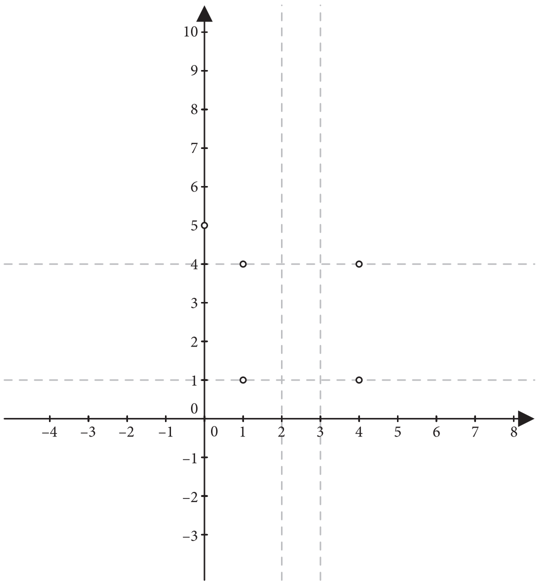
Slika 6.

S druge strane za $y = 1$ i $y = 4$ imamo $f(x) = |x-2| + |x-3| = 3$, pa imamo $x = 1$ i $x = 4$ (slika 7).



Slika 7.

Dakle, kritične točke jednadžbe su točke (1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4) (slika 8).



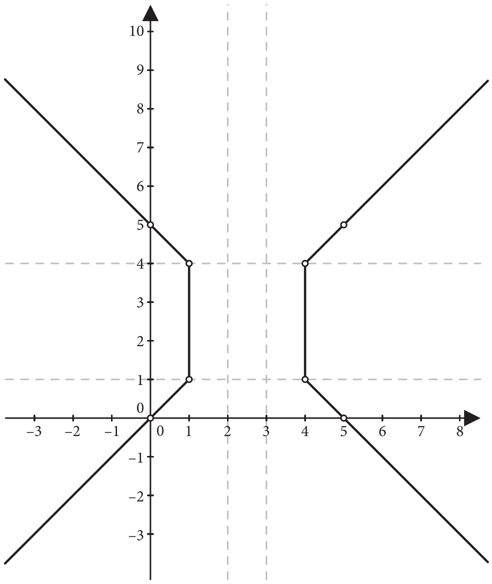
Slika 8.

Dakle, u tri skupa iz Ω koji se nalaze između pravaca $x = 2$ i $x = 3$ nemamo kritičnih točaka pa je prema tome njihov presjek sa skupom P neprazan (svojstvo 1.).

U skupovima $\left(-\infty,2\right]\times\left[1,4\right]$ i $\left[3,\infty\right)\times\left[1,4\right]$ imamo po dvije kritične točke pa je presjek svakog od njih s traženim skupom P dužina (svojstvo 5.). Kod prvog skupa radi se o dužini $\left\{1\right\}\times\left[1,4\right]$, a kod drugog o dužini $\left\{4\right\}\times\left[1,4\right]$.

U svakom preostalom neograničenom skupu S iz Ω imamo po jednu kritičnu točku koja se ne nalazi u vrhu ruba skupa S pa je u njemu prema svojstvu 7. potrebno nacrtati polupravac. U skupu S dakle tražimo još jednu točku koja zadovoljava zadanu jednadžbu. Očito je da nema smisla tražiti točke (x, y) takve da je $1 < x < 4$. Pokušajmo s $x = 0$. Imamo $\left|y-1\right|+\left|y-4\right|=5$ pa je $y = 0$ i $y = 5$ (slika 6). Za $x = 5$ opet je $\left|y-1\right|+\left|y-4\right|=5$ te je također $y = 0$ i $y = 5$. Dakle, ucrtavanjem točaka (0, 0), (0, 5), (5, 0), (5, 5) možemo odrediti tražene polupravce.

Konačno, skup P sastoji se od dviju dužina i četiriju polupravaca (slika 9).



Slika 9.

Primjer 4. Određujemo točke koje zadovoljavaju jednadžbu

$$2\left|x-1\right|+\left|x-3\right|+\left|x+1\right|=2\left|y-1\right|+\left|y-3\right|.$$

Rješenje.

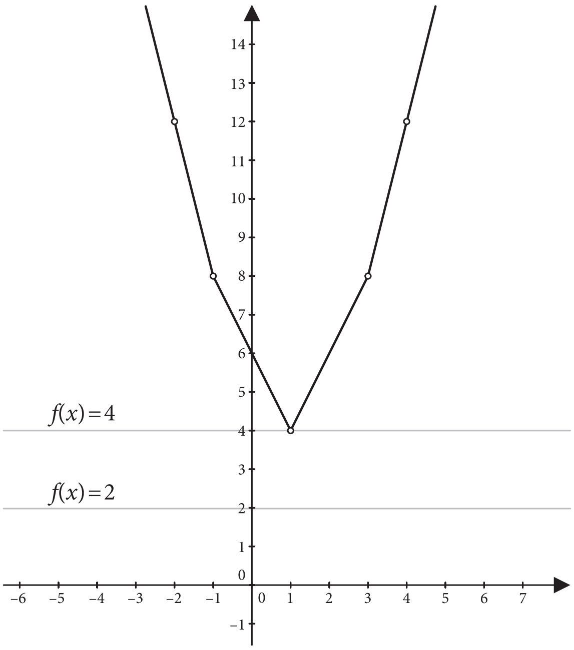
Sada podijelimo ravninu kritičnim pravcima $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ te $y = 1$ i $y = 3$. Kao i prije, na tim pravcima tražimo kritične točke jednadžbe.

Skiciramo graf funkcije f pridružene lijevoj (slika 10) te graf funkcije g pridružene desnoj strani (slika 11) jednadžbe te na njima očitavamo vrijednosti.

Prvo, za $x = -1$ iz zadane jednadžbe dobivamo $g(y) = 8$ pa imamo $y = \frac{13}{3}$ i $y = -1$.

Nadalje, za $x = 1$ je $g(y) = 4$ pa je $y = \frac{1}{3}$ i $y = 3$.

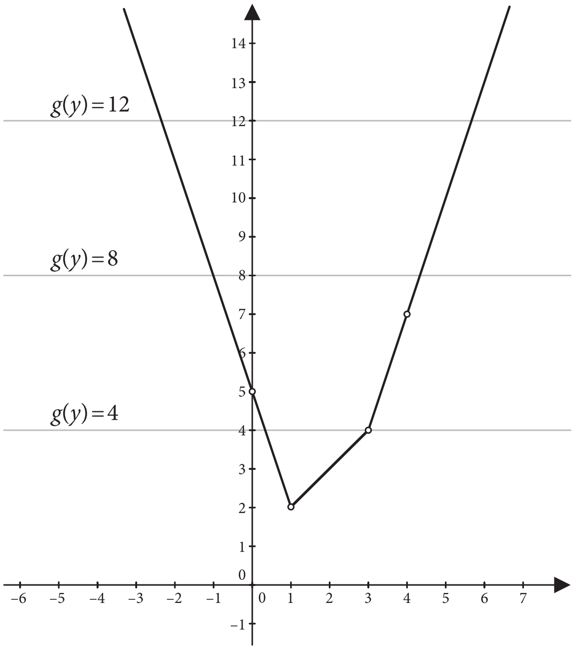
Konačno, za $x = 3$ je $g(y) = 8$ pa je opet $y = \frac{13}{3}$ i $y = -1$.



Slika 10.

S druge strane za $y = 1$ je $f(x) = 2$, što nema rješenja.

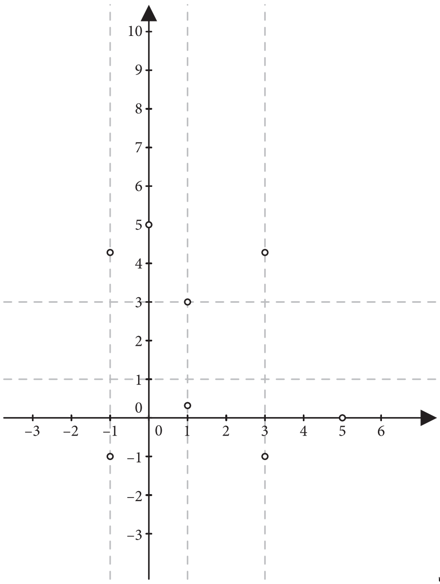
I napokon, za $y = 3$ je $f(x) = 4$, te je $x = 1$.



Slika 11.

Sada u koordinatnom sustavu crtamo dobivene kritične točke

$\left(-1,\dfrac{13}{3}\right)$, $(-1,-1)$, $\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$, $(1,3)$, $\left(3,\dfrac{13}{3}\right)$, $(3,-1)$ (slika 12).

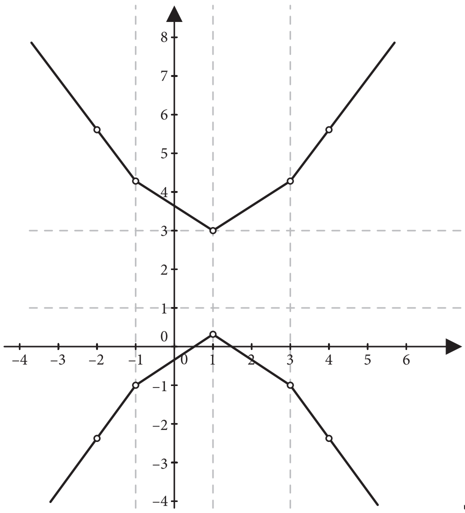


Slika 12.

U dva ograničena skupa iz Ω imamo samo po jednu kritičnu točku, pa prema svojstvu 6. u njima crtamo samo te točke. U neograničenim skupovima iz Ω koji se nalaze između pravaca $x = -1$ i $x = 3$ imamo po dvije kritične točke pa u njima crtamo dužine kojima su te točke krajnje (svojstvo 5.). Imamo i dva neograničena skupa iz Ω između pravaca $y = 1$ i $y = 3$ koji ne sadrže kritične točke pa u njima ne crtamo ništa (svojstvo 1.). U ostalim skupovima imamo po jednu kritičnu točku koja nije u vrhu ruba skupa pa u njima moramo crtati polupravce (svojstvo 7.). Dakle, u tim skupovima trebamo odrediti po još jednu točku koja zadovoljava jednadžbu. Nađimo te točke npr. za $x = -2$ i $x = 4$. U oba je slučaja $g(y) = 12$ pa je $y = \frac{17}{3}$ i $y = -\frac{7}{3}$.

Dakle, traženi polupravci su, osim kritičnim točkama, određeni i točkama $\left(-2, \frac{17}{3}\right)$, $\left(-2, -\frac{7}{3}\right)$, $\left(4, \frac{17}{3}\right)$, $\left(4, -\frac{7}{3}\right)$.

Konačno, traženi skup izgleda kao na slici 13.



Slika 13.

Literatura

1. D. Jelenčić, M. Starčević: Grafičko rješavanje sustava jednadžbi s apsolutnim vrijednostima, Poučak, 66, 14-23 (2016.).