

Modeli e-učenja korištenjem programa dinamične geometrije¹

ŽELJKA DIJANIĆ²

Tema: primjena tehnologije

Ključni pojmovi: e-učenje, GeoGebra, ishodi učenja, model učenja, objekti učenja, okolina za učenje, učenje otkrivanjem, vizualizacija

Sažetak

Pri dizajnu računalnog okruženja za učenje svakako valja razmotriti početno stanje procesa učenja koje se odnosi na predznanje učenika, stečene vještine, emocionalno stanje (stavove, motivaciju, emocije, ponašanja) te ga osmisliti prema željenim ishodima učenja (konceptualno i/ili proceduralno znanje). Kod e-učenja posebna se pažnja posvećuje količini kontrole, odnosno slobode učenika tijekom procesa učenja (Shute, 1992).

Elliott, Sweeney i Irving (2009) razvili su konceptualni model e-učenja koji se temelji na konstruktivističkom pristupu i strategiji učenja otkrivanjem, a naglasak je na odabiru objekata učenja i aktivnostima učenika koje će dovesti do realizacije željenih ishoda. Prema tome su modelu osmišljeni e-udžbenici slobodno dostupni na GeoGebra Tube portalu, a nastali kao uređena zbirka interaktivnih apleta koja postupno vodi učenike od motivacijskih, preko istraživačkih pa sve do apleta za uvježbavanje, primjenu i ponavljanje (Dijanić, 2015). Ovako vođeno učenje otkrivanjem polako i sigurno učenike vodi k cilju, a količina kontrole učenika je minimalna jer oni rade prateći unaprijed zadane upute.

S druge strane, Buitrago (2006) predlaže model e-učenja matematike metodom rješavanja problema s naglaskom na kreativnosti, kritičkom mišljenju, pokušajima i pogreškama, suradničkom radu. GeoGebra je izuzetno pogodan alat i za ovakav model učenja. Jednostavno sučelje, intuitivno korištenje naredbi, vizualizacija i veza između grafičkog, algebarskog i tabličnog prikaza te interaktivnost promatranih objekata učenicima omogućuju eksperimentiranje na „goloj GeoGebri”, kreiranje vlastitih dinamičnih konstrukcija i evaluaciju dobivenih rezultata.

¹Predavanje održano na 7. kongresu nastavnika matematike RH, 2016. godine u Zagrebu

²Željka Dijanić, Srednja škola Čazma, Čazma

1. Uvod

O e-učenju, odnosno učenju uz pomoć elektroničkih medija i informacijsko-komunikacijske tehnologije (IKT) unazad nekoliko godina sve se više govori, a brojni su i pokušaji učitelja da osuvremene i obogate nastavu korištenjem multimedije, interneta, edukacijskih igara, *online* kvizova i sl.

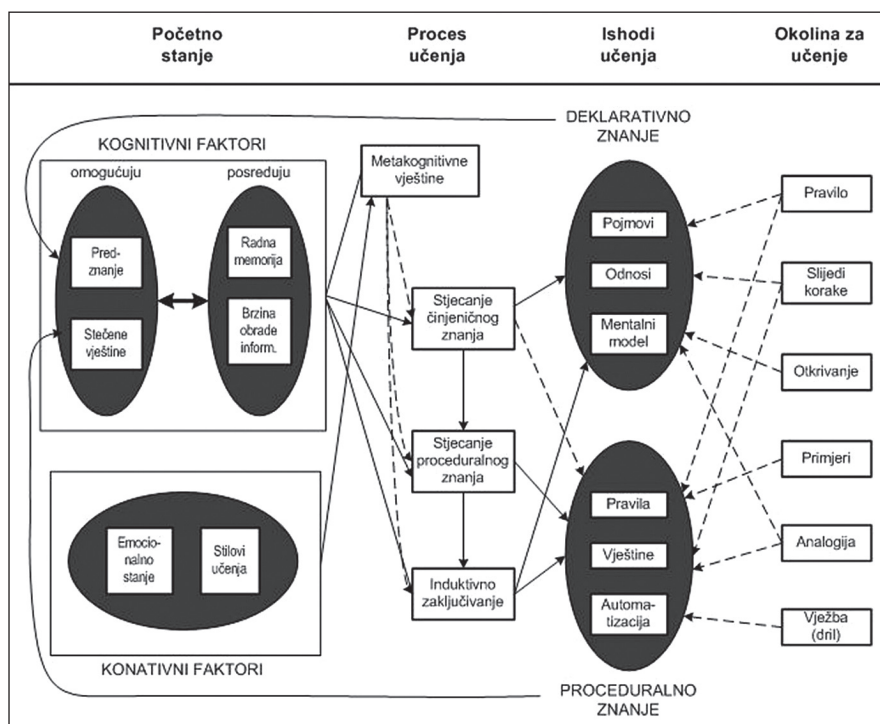
Za nastavu matematike preporuča se korištenje specijaliziranih računalnih programa koji podržavaju jedan ili više matematičkih prikaza (grafički, simbolički, tablični), odnosno digitalnih nastavnih materijala čija su osnovna svojstva dinamičnost i interaktivnost. Tu se ubrajaju: programi dinamične geometrije, tablični kalkulatori, grafički alati, sustavi računalne algebre (CAS) i ostali interaktivni alati (Glasnović Gracin, 2008). Računalni program dinamične geometrije, čiji je razvoj u posljednjih desetak godina toliko napredovao da današnja inačica ima ugrađene mogućnosti ostalih gore navedenih programa, jest *GeoGebra*. To je program otvorenog koda što omogućava slobodno korištenje u školama i domovima učenika i učitelja. *GeoGebra* objedinjuje elemente geometrije, algebre, analize i statistike, čime pokriva široku primjenu u matematici. Učitelji u hrvatskim školama sve više ga koriste, a postoji i bogati repozitorij gotovih materijala (*GeoGebraTube*) s mogućnošću slobodnog korištenja te izrazito jaka podrška korisnicima kao i kontinuirano ugrađivanje novih mogućnosti i prilagodba novim tehnologijama poput mobitela i tableta. Prije nego pokažemo neke primjere korištenja *GeoGebra* u nastavi matematike, pogledajmo tri modela učenja na kojima bi trebala počivati uporaba programa dinamične geometrije u nastavi matematike.

2. Modeli e-učenja

Kada se govori o procesu učenja općenito, tada se u stručnoj i znanstvenoj literaturi često polazi od **funkcionalnog modela** učenja koji predlaže Shute (1992). Taj se model temelji na analizi ulaznih karakteristika učenika, opisu ishoda učenja te definiranju procesa učenja koji će učenika iz početnog stanja dovesti do željenih ishoda, pri čemu se promatra utjecaj okoline za učenje.

Početno stanje učenika uključuje kognitivne i konativne čimbenike. Kognitivni potencijal učenika odnosi se na mentalne procese, a uključuje faktore koji omogućuju proces učenja (predznanja, stečene vještine) i medijatore učenja (kapacitet radne memorije, brzina procesuiranja informacija). Konativni potencijal učenika uključuje emocionalno stanje učenika (stavovi, osjećaji, ponašanje, motivacija) i preferirane stilove učenja.

Proces učenja odnosi se na niz akcija ili promjena koje izravno utječu na ishode učenja, pri čemu Shute razlikuje procese stjecanja činjeničnog znanja, procese stjecanja proceduralnog znanja i procese induktivnog zaključivanja koji su međusobno povezani te kontrolirani metakognitivnim vještinama pojedinca. Vezano uz različite

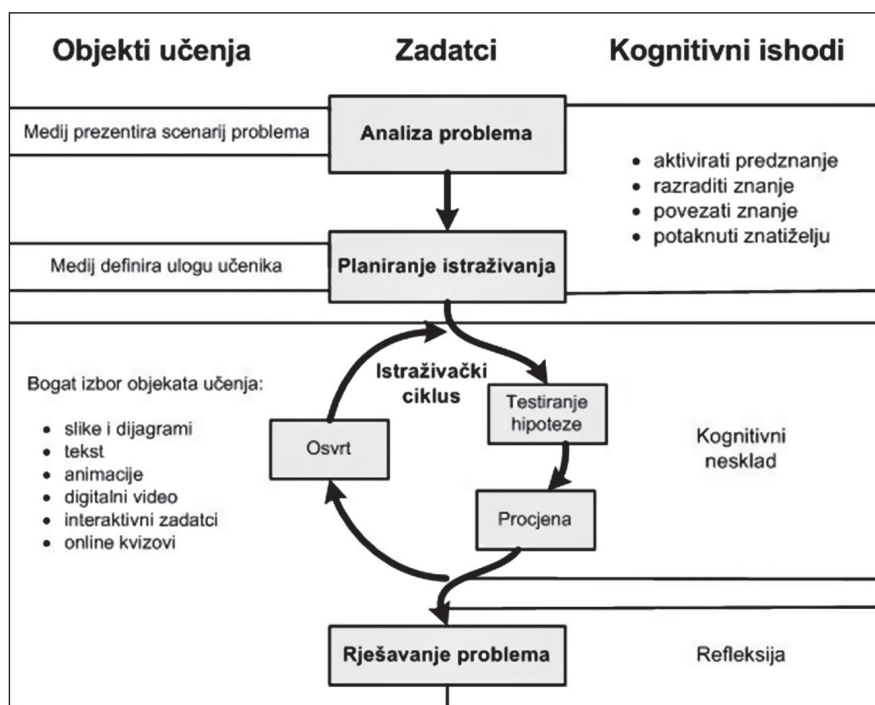


Slika 1. Funkcionalni model učenja (Shute, 1992)

procesu učenja, ishodi učenja dijele se na deklarativne i proceduralne. Deklarativno znanje odnosi se na poznavanje elementarnih pojmova, tvrdnji, odnosa među njima, pa i mentalnog modela kao organiziranog skupa povezanih pojmova, koncepata i pravila. Proceduralno znanje uključuje poznavanje osnovnih postupaka i vještina te njihovu automatizaciju. Količinu kontrole (odnosno slobode učenika) tijekom procesa učenja određuje okolina za učenje. Kontrola učenika može biti minimalna (izravne „naredbe” nastavnika, upute „slijedi korake”, vježba, dril) pa u postupnom rasponu sve do potpune kontrole učenika (učenje otkrivanjem, zaključivanje po analogiji ili indukciji, analiza primjera).

Elliott, Sweeney i Irving (2009) razvijaju **konceptualni model e-učenja** koji se temelji na konstruktivističkom pristupu te strategiji učenja otkrivanjem. Naglasak stavljaju na odabir objekata učenja s ciljem postizanja željenih kognitivnih ishoda učenja, a zadatke za učenike planiraju kroz sljedeće etape: analizu problema, planiranje istraživanja, istraživački ciklus i rješavanje problema.

Kao objekti učenja mogu se koristiti različiti mediji: tekst i hipertekst, slike i dijagrami, animacije i video, simulacije i virtualni laboratorij, interaktivni zadatci, *online* kvizovi i sl. Njima se prezentira scenarij problema, čime mediji direktno utječu na sadržaj koji se proučava i definiraju ulogu učenika u procesu učenja. Zadatci za



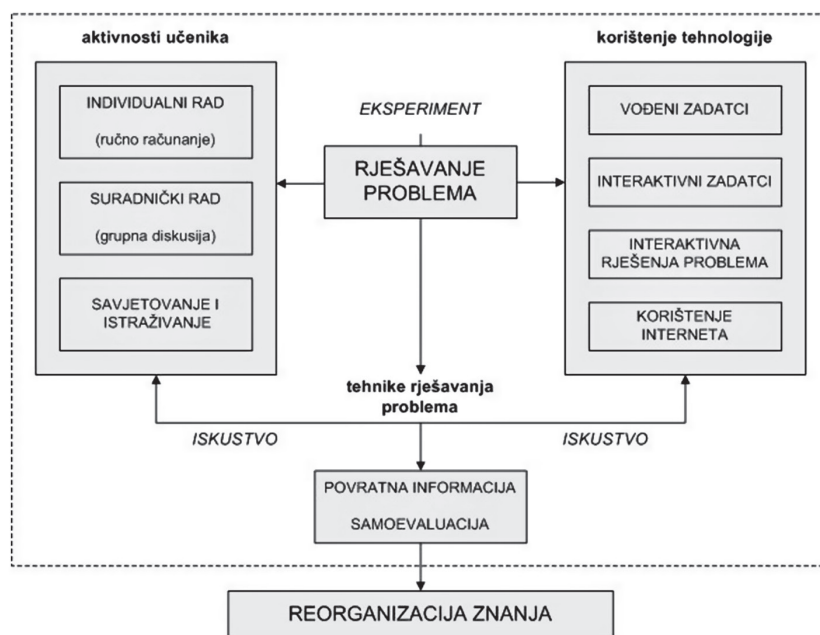
Slika 2. Konceptualni model e-učenja (Elliott, Sweeney i Irving, 2009)

učenike definiraju se u obliku jednostavnijeg istraživačkog ciklusa koji je po etapama sličan znanstvenom istraživanju, a ideja rješavanja problema gotovo je identična Polynom (1966) modelu rješavanja matematičkog zadatka: razumijevanje zadatka, stvaranje plana, izvršavanje plana i osvrt. Istraživanje efikasnosti ovoga modela e-učenja u nastavi prirodoslovlja pokazuje veliku prednost u korištenju većeg broja jednostavnijih objekata učenja i njihovu ponovnu uporabu, a za učenike je od velike važnosti i istraživački ciklus kojim se može „prolaziti” nekoliko puta dok se ne dođe do rješenja problema.

Buitrago (2006) razvija **model učenja matematike metodom rješavanja problema koristeći IKT** s naglaskom na kreativnosti učenika, kritičkom mišljenju, nezavisnom učenju, grupnom radu, razvoju sposobnosti evaluacije rezultata, proučavanju pogrešaka i povezivanju nastavnih sadržaja.

Aktivnosti učenika planiraju se kao individualni rad, suradnički rad s kolegama i putem interakcije učenik-učitelj, pri čemu vrlo važnu ulogu igra iskustvo učenika u takvom načinu rada. Uporaba IKT-a omogućuje različite aktivnosti učenika:

- vođeni zadatci – rješenje problema istražuje se korak po korak prateći upute programa
- interaktivni zadatci – koristi se interaktivnost tehnologije kako bi se ispitala moguća rješenja te dobila povratna informacija jesmo li na dobrom putu



Slika 3. Model učenja matematike metodom rješavanja problema (Buitrago, 2006)

- interaktivna rješenja problema – učenik samostalno uz pomoć IKT pokušava konstruirati rješenje problema, potom promjenom ulaznih parametara analizira njegovu smislenost i konzistentnost te procjenjuje vlastiti rad
- korištenje interneta – za pretraživanje relevantne literature i komunikaciju s drugim učenicima i učiteljem

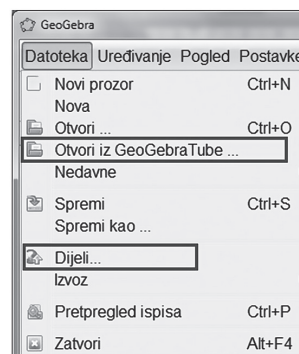
Uspješnost ovog modela učenja ovisi ponajviše o učeniku i njegovim sposobnostima: disciplini u radu i učenju, preuzimanju odgovornosti, raspodjeli vremena, znatiželji, želji za istraživanjem, sposobnosti analize prikupljenih podataka i sposobnosti samoevaluacije.

Uporaba IKT-a omogućuje učenje potpomognuto modelima (*model-facilitated learning*). De Jong i van Joolingen (2008) raspravljaju o tri različita načina korištenja računalnih modela, odnosno simulacija u procesu učenja. Jedan od njih je učenje iz modela (*learning from models*) u kojem učenici kroz istraživanje dinamičnog modela prikupljaju saznanja o njemu. Takvim se modelima mogu mijenjati ulazni parametri (nezavisne varijable) pa učenici promatraju dobivene vrijednosti (zavisne varijable) i izvode vlastite zaključke. Drugo je učenje modeliranjem (*learning by modeling*) u kojem učenici uče stvaranjem računalnih modela. Ovakav pristup zahtijeva dobro poznavanje rada u odabranom računalnom programu kako bi učenici mogli konstruirati model koji bi dobro simulirao promatranu pojavu iz realnog svijeta. Treće

je kombinacija prethodnih dvaju (*model-based inquiry learning*); to je model učenja koji doprinosi integriranom procesu učenja otkrivanjem temeljenom na konstruiranom modelu, a koji je po mnogočemu sličan znanstvenom istraživanju.

3. E-udžbenik – na primjeru GeoGebre

U tehničkom smislu možemo razlikovati dvije vrste digitalnih obrazovnih materijala nastalih programom *GeoGebra* – *geogebri* i interaktivne *aplete*. *Geogebri* su popularno zvani uradci napravljeni u *GeoGebri*, odnosno datoteke tipa *.ggb* za čiji je pregled nužno imati instaliranu *GeoGebra* na računalo. Učitelji ih pripremaju unaprijed kod kuće ili izrađuju *ad hoc* na satu prema potrebi. Želimo li sadržaj *geogebri* podijeliti s drugim kolegama ili staviti dostupno učenicima putem interneta, tada ćemo generirati interaktivni *aplet* čiji se sadržaj otvara u bilo kojem internetskom pregledniku (bez obzira je li na računalo instalirana *GeoGebra* ili nije). Naredba *Dijeli...* iz izbornika *Datoteka* omogućuje jednostavno postavljanje uradaka na portal *GeoGebraTube* (<http://tube.geogebra.org/>), a svaki uradak koji se tamo postavi (bilo vlastiti ili tuđi) može se preuzeti na svoje računalo u obliku *geogebri* korištenjem naredbe *Otvori iz GeoGebraTube...* (Slika 4.). Licenca javno dostupnih *apleta* na *GeoGebraTube* portalu je *Creative Commons* (dijeli pod istim uvjetima) što nam dopušta mijenjanje preuzetih uradaka, odnosno prilagodbu vlastitim potrebama.



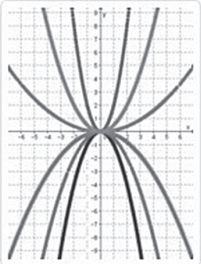
Slika 4. Postavljanje i preuzimanje uradaka na *GeoGebraTube*

Aplete koji su tematski (ili na neki drugi način) povezani na portalu *GeoGebraTube* moguće je objediniti i povezati u e-udžbenik. Tako nastaju prave male zbirke interaktivnih *apleta* koje se mogu organizirati u poglavlja. Prema modelima učenja opisanima u prethodnom poglavlju nastali su e-udžbenici čija je ideja da učenici samostalnim radom i učenjem otkrivanjem usvajaju i uvježbavaju nove matematičke sadržaje. Dijanić (2015) detaljno opisuje koncepciju takvih e-udžbenika i ulogu pojedinih *apleta* prema etapama nastavnog sata: motivacijski *apleti*, istraživački *apleti*, *apleti* za uvježbavanje, primjenu i ponavljanje.

Pogledajmo primjer e-udžbenika za nastavnu jedinicu **Kvadratna funkcija** koji je dostupan za slobodno korištenje na <http://tube.geogebra.org/book/title/id/2125055>. *Apleti* su organizirani u poglavlja koja predstavljaju nastavne teme i predviđeni su za realizaciju u jednom nastavnom satu: graf kvadratne funkcije i translacije grafa kvadratne funkcije (Slika 5.). Svako poglavlje prati i radni list koji se ispiše i podijeli učenicima kako bi mogli zapisati svoje zaključke i/ili riješiti koji zadatak na papiru.

Kvadratna funkcija

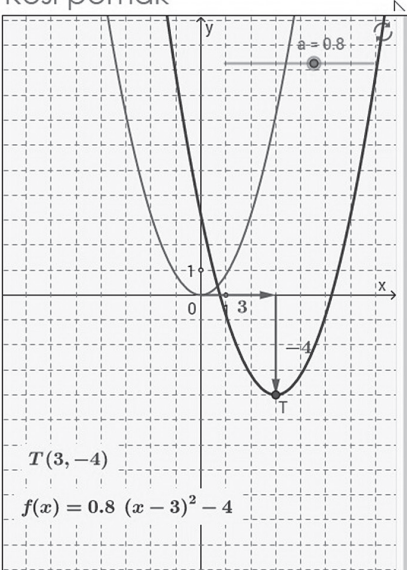
Željka Dijanić, 21. stu 2015.



- 1. Graf kvadratne funkcije**
 1. Motivacijski zadatak: slobodni pad
 2. Vrijednosti kvadratne funkcije
 3. Graf funkcije kvadriranja $f(x)=x^2$
 4. Crtanje grafa funkcije $f(x)=ax^2$
 5. Svojstva kvadratne funkcije $f(x)=ax^2$
 6. Vježbalica: pročitaj graf... koliki je a?
 7. Radni list za učenike
- 2. Translacije grafa kvadratne funkcije**
 1. Vertikalni pomak
 2. Horizontalni pomak
 3. Kosi pomak
 4. Vježbalica: pročitaj graf kvadratne funkcije
 5. Vježbalica: nacrtaj graf kvadratne funkcije
 6. Crtač grafa kvadratne funkcije
 7. Radni list za učenike

Slika 5. Apleti u e-udžbeniku Kvadratna funkcija

Kosi pomak



Pogledajmo što se događa ako parabolu $f(x) = ax^2$ povlačimo u bilo kojem smjeru.

1. Pomicite tjeme T i promatrajte promjene jednadžbe parabole.
2. Mijenjajte vrijednost koeficijenta a pomoću klizača. Utječe li koeficijent a na položaj tjemena T?
3. Pokušajte iz jednadžbe parabole odrediti tjeme:
 - Zadaci
 - Provjeri!
$$f_1(x) = -(x + 1)^2 + 2$$

$$f_2(x) = 2(x - 4)^2 - 3$$

$$f_3(x) = 1.5(x + 2)^2 - 5$$
4. Koja je točka tjeme parabole zadane jednadžbom $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$?

Odgovore zapišite na radnom listu!

Slika 6. Istraživački aplet za kosi pomak kvadratne funkcije

Apleti za istraživanje osmišljeni su tako da odabranim pitanjima i postupnim zadacima učenika vode do otkrića novih spoznaja i formuliranja vlastitog zaključka. Interaktivnost i dinamičnost *GeoGebre*, koja u vrlo kratkom vremenu može prikazati puno različitih primjera, omogućava otkrivanje koje je bez računala gotovo neizve-





divo. Slika 6. prikazuje istraživački *aplet* za kosi pomak kvadratne funkcije $f(x) = ax^2$. U desnom dijelu prozora nalaze se upute za rad, a u lijevom dinamični *aplet*. Pomicanjem tjemena parabole i promjenom parametra a učenici istražuju vezu između eksplicitnog zapisa kvadratne funkcije $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ i njegova grafa.

Postupnim navikavanjem učenika na ovakav način učenja primjećuju se jako dobri rezultati u nastavi. Svi su učenici aktivni, svatko radi svojim tempom, mogu ponavljati pojedine zadatke koliko god im je puta potrebno da shvate, a *apleti* za uvježbavanje, brza povratna informacija i skupljanje bodova vrlo su motivirajući. Vizualizacija doprinosi boljem razumijevanju zadataka vezanih uz interpretaciju grafa funkcije. Međutim, nedostatak ovih digitalnih materijala je što učenici ne mogu uvježbavati crtanje grafova „prostom rukom” kada rade samo na računalu. Stoga je u radni list koji slijedi e-udžbenik dodano nekoliko zadataka crtanja grafova (na papiru) čiju točnost učenici mogu provjeriti *apletom* Crtač grafa.

4. Modeliranje u GeoGebri – primjer homotetije

Učenje po modelu vođenog učenja otkrivanjem polako i sigurno učenika vodi k cilju, ali količina njegove slobode je minimalna. Želimo li da učenici pokažu svoju kreativnost, kritički promišljaju, uče na pokušajima i pogreškama, rješavanju različite probleme uz pomoć IKT-a, trebamo im ponuditi eksperimentiranje na „goloj *GeoGebri*”. Učenici će tada prvo kreirati vlastite dinamične konstrukcije (modele), a potom istraživati utjecaj pojedinih parametara na rješenje problema opisanog tim modelom.

Ovisno o složenosti promatranog problema, ali i stupnju učenikova poznavanja rada u *GeoGebri*, zadatke treba osmisliti i pripremiti tako da ih većina učenika može uspješno odraditi (slabijima učitelj može pomoći). Pri tome kratke upute za snalaženje u programu vezano uz konkretan problem mogu biti od velike pomoći.

1.a umetanje sličice u GeoGebru	 (10. alatna skupina) pa lijevi klik u prozor grafičkog prikaza, otvori se dijaloški okvir, odaberete neku sliku i <i>Open</i> . Napomena: slika neka ne bude rezolucije veće od 250x250 jer će biti prevelika kad se umetne u GeoGebru.
2. homotetija	a) naredbom  nacrtate točku (središte homotetije) u prozoru graf. prikaza b) u polje za unos upišite $k=1.5$ (koef. homotetije) c) kliknite na bijeli kružić ispred $k=1.5$ da se pojavi klizač d) odaberite naredbu za homotetiju  (7. alatna skupina) d) kliknite na sliku pa na točku (središte homotetije), u dijaloški okvir upišite k e) odaberite alat za pomicanje  te pomičite klizač, točku ili sliku f) promatrajte promjene, kako koeficijent k utječe na sliku nastalu homotetijom
3. umetanje slike u Word	a) lijepo rasporedite sve elemente unutar grafičkog prikaza GeoGebre (alatom za pomicanje), ako treba smanjite ili povećajte prozor grafičkog prikaza povlačenjem rubova b) Datoteka > Izvoz > Grafički prikaz u međuspremnik... ili Ctrl + Shift + C c) zalijepite sadržaj međuspremnika u Word ili Ctrl + V

Slika 7. Upute učenicima za konstrukciju homotetije

Pogledajmo primjer učenja o homotetiji ovakvim načinom. Učenici su dobili zadatak istražiti kako će homotetija „djelovati” na neku, učeniku po volji, odabranu sličicu. Da ne bi bilo previše lutanja i nepotrebnog trošenja vremena, pripremljene su detaljne upute za rad (Slika 7.) koje su rezultirale zanimljivim radovima učenika (Slika 8.).



Slika 8. Radovi učenika (Karlo i Monika, 2.c, Srednja škola Čazma)

Literatura:

1. Buitrago, H. (2006.). *A model for teaching mathematics via problem-solving supported by technology*. U: Hoyles, C. i dr. (ur.), *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference „Technology Revisited”* (66-73), Hanoi University of Technology.
2. De Jong, T., Van Joolingen, W. R. (2008.). *Model-Facilitated Learning*. U: Spector, J. M. i dr. (ur.), *Handbook of research on educational communications and technology* (457-468), New York: Lawrence Erlbaum.
3. Dijanić, Ž. (2015.). *Zadatci u kontekstu e-udžbenika*. U: Gortan, R. (ur.), *Zbornik radova Devetog stručno-metodičkog skupa Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi „zadatci u nastavi matematike”* (56-71). Pula: MDI.
4. Elliott K., Sweeney K. i Irving H. (2009.). *A learning design to teach scientific inquiry*. U: Lockyer, L. i dr. (ur.), *Handbook of Research on Learning Design and Learning Objects: Issues, Applications, and Technologies* (652-675), Hershey & London: IGI Global.
5. Glasnović Gracin, D. (2008.). *Računalo u nastavi matematike: Teorijska podloga i metodičke smjernice*. *Matematika i škola*, 46, 10-15.
6. Polya, G. (1966.). *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Zagreb: Školska knjiga.
7. Shute, V. J. (1992.). *Learning processes and learning outcomes*. (Report No. AL-TP-1992-0015). Air Force Systems Command, Brooks Air Force Base, Texas.