# Zanimljivi zadatci s brojem 2017

Katarina Vincetić[1], Snježana Majstorović[2]

## 1. Uvod

Zadatci s brojem tekuće godine često se pojavljuju na školskim, županijskim i državnim matematičkim natjecanjima za učenike srednjih škola. Takve zadatke nastavnici mogu uključiti i u redovnu nastavu prilagođavajući ih nastavnoj cjelini koju obrađuju.

## 2. Kako osmisliti zadatke s brojem tekuće godine?

Svaki nastavnik dovoljno je vješt da sam može osmisliti zadatke s brojem tekuće godine, a u sklopu nastavne cjeline koju obrađuje. Međutim, za stvaranje takvih zadataka mogu poslužiti slični zadatci s prošlogodišnjih natjecanja ili zadatci iz nastavnih udžbenika.

Zadatci s prošlogodišnjih natjecanja dostupni su na web stranicama natjecanja iz matematike v. [1]. Svaki ih nastavnik može potražiti, odabrati one u kojima se pojavljuje broj tadašnje tekuće godine, te ih modificirati u zadatke s brojem 2017. Kada nastavnik odabere takve zadatke, potrebno je razmisliti o načinima i mogućnosti njihova modificiranja u zadatke s brojem 2017. Pogledajmo sljedeće primjere.

**2.1. Primjer** (Državno natjecanje iz matematike, 1. razred, B varijanta, 2016.)

Riješite nejednadžbu

$$\begin{aligned}&\frac{x-8}{2012}+\frac{x-7}{2013}+\frac{x-6}{2014}+\frac{x-5}{2015}+\frac{x-4}{2016}\\ &\leq\frac{x-2012}{8}+\frac{x-2013}{7}+\frac{x-2014}{6}+\frac{x-2015}{5}+\frac{x-2016}{4}.\end{aligned}$$

Prije samog modificiranja zadatka, pogledajmo ideju njegova rješavanja. Zadatak rješavamo tako da dodamo pet puta $-1$ na obje strane nejednadžbe, sredimo izraze, prebacimo sve pribrojnike na lijevu stranu i izlučimo zajednički faktor. Dobivamo

[1]Katarina Vincetić, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek

[2]Snježana Majstorović, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek



Poucak 72.indd 6 3.1.2018. 14:33:05

$$\left(x-2020\right)\left(\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}-\frac{1}{8}-\frac{1}{7}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\leq 0.$$

Izraz u drugoj zagradi je negativan jer je svaki od prvih 5 razlomaka manji od svakog od drugih 5 razlomaka. Stoga je izraz manji ili jednak nuli ako i samo ako je $x-2020\geq 0$, pa je rješenje zadatka $x\in\left[2020,+\infty\right)$.

Zadatak želimo modificirati tako da ideja rješavanja ostane ista, a da se u zadatku pojavljuje broj tekuće godine, broj 2017. U ovom slučaju to možemo učiniti na više načina.

Jedna mogućnost je dodavanje pribrojnika, i to jednog na lijevu, a drugog na desnu stranu nejednadžbe, prateći pritom postojeće pribrojnike. Pogledajmo:

$$\frac{x-8}{2012}+\frac{x-7}{2013}+\frac{x-6}{2014}+\frac{x-5}{2015}+\frac{x-4}{2016}+\frac{x-3}{2017}$$
$$\leq\frac{x-2012}{8}+\frac{x-2013}{7}+\frac{x-2014}{6}+\frac{x-2015}{5}+\frac{x-2016}{4}+\frac{x-2017}{3}.$$

Druga mogućnost je, ako želimo da broj pribrojnika ostane isti, izbacivanje prvih pribrojnika na lijevoj i desnoj strani nejednadžbe i umjesto njih dodavanje pribrojnika kao u prethodnom slučaju:

$$\frac{x-7}{2013}+\frac{x-6}{2014}+\frac{x-5}{2015}+\frac{x-4}{2016}+\frac{x-3}{2017}$$
$$\leq\frac{x-2013}{7}+\frac{x-2014}{6}+\frac{x-2015}{5}+\frac{x-2016}{4}+\frac{x-2017}{3}.$$

Kada smo proučili ideju rješavanja zadatka, možemo se i malo više „poigrati” prilikom njegova sastavljanja. Umjesto zajedničkog faktora $x$ – 2020, možemo zahtijevati da zajednički faktor bude npr. $x$ – 2018. Tada, umjesto uzastopnih godina na lijevoj i brojeva na desnoj strani nejednadžbe, možemo krenuti npr. od tekuće godine i uzeti tri prethodne „neparne” godine. Dobivamo:

$$\frac{x-1}{2017}+\frac{x-3}{2015}+\frac{x-5}{2013}+\frac{x-7}{2011}\leq\frac{x-2017}{1}+\frac{x-2015}{3}+\frac{x-2013}{5}+\frac{x-2011}{7}.$$

Rješavanje modificiranih nejednadžbi prepuštamo čitatelju!

**2.2. Primjer** (Školsko natjecanje iz matematike, 2. razred, B varijanta, 2016.)

Ako je

$$f\left(n\right)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n,$$

gdje je $n\in\mathbb{N}$, $i^2=-1$, koliko je $f\left(n+2016\right)-f\left(n-2016\right)$?



Poucak 72.indd 7 3.1.2018. 14:33:06

*Rješenje:*

$$\begin{aligned} f(n+2016) &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n+2016} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n+2016} \\ &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2016}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right]^{1008} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{1008} = i^{1008} = 1$$

i slično

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = -1,$$

slijedi

$$f(n+2016) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n} = f(n).$$

Ključan korak u rješavanju ovog zadatka je djeljivost broja 2016 s 2. Kako je 2017 prost broj, ovaj zadatak ne možemo modificirati u zadatak s brojem 2017, a da ideja njegova rješavanja ostane ista. Možemo li to učiniti sljedeće godine?

Ideju osmišljavanja zadataka s brojem tekuće godine nastavnici mogu pokazati i učenicima te ih učiniti stvarateljima, a ujedno i rješavateljima zadataka. Naprimjer, prilikom ponavljanja obrađenih cjelina ili cjelokupnog gradiva, nastavnici mogu uputiti učenike u metode stvaranja takvih zadataka, a onda od njih zatražiti da pokušaju samostalno osmisliti barem jedan zadatak te vrste. Nakon što su zadatci uspješno osmišljeni, učenici ih rješavaju i o njima raspravljaju. Na taj način uloga učenika nije samo u rješavanju zadataka, već moraju razmišljati i o načinima i o mogućnosti njihova modificiranja kako bi dobili smisleno rješenje. Učenici postaju aktivni stvaratelji i sudionici nastave!

## 3. Zadatci

U ovom odjeljku zadatci su podijeljeni u četiri poglavlja koja se redom odnose na prvi, drugi, treći i četvrti razred srednje škole. Unutar svakog poglavlja grupirani su s obzirom na neke cjeline koje se obrađuju na nastavi matematike na toj razini prateći gimnazijski program.



Poucak 72.indd 8 3.1.2018. 14:33:06

## 3.1. Zadatci za prvi razred srednje škole

Jedna od nastavnih cjelina u prvom razredu srednje škole je „Potencije i algebarski izrazi". Unutar te cjeline mogu se osmisliti razni zanimljivi zadatci s brojem 2017. Prije proučavanja samih zadataka učenici trebaju ponoviti definiciju potencije i pravila za računanje s potencijama i algebarskim izrazima.

### 3.1.1. Zadatak

Odredite cijele brojeve $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7$ za koje vrijedi

$$2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + 2^{x_4} + 2^{x_5} + 2^{x_6} + 2^{x_7} = 2017.$$

*Rješenje*:

Kako je $2^{11} = 2048 > 2017,$ mora vrijediti $x^7 \leq 10.$ S obzirom da je

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 2047$$

i

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30,$$

rješenje zadatka je uređena sedmorka $\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\right) = \left(0,5,6,7,8,9,10\right).$

### 3.1.2. Zadatak

Izračunajte

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2017^2}\right).$$

*Rješenje:*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2017^2}\right)$$
$$=\left(1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{2017}\right)^2\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2017}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2017}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2016}{2017}\cdot\frac{2018}{2017}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2018}{2017}=\frac{1009}{2017}.$$

### 3.1.3. Zadatak

Odredite posljednje dvije znamenke broja $6^{2017}$.



Poucak 72.indd 9 3.1.2018. 14:33:06

*Rješenje:*

Neposrednim izračunavanjem utvrđujemo da brojevi $6^2, 6^3, 6^4, 6^5, 6^6, 6^7, \ldots$ završavaju redom znamenkama $36, 16, 96, 76, 56, 36, \ldots$ pa se posljednje dvije znamenke periodično ponavljaju, i to s periodom od 5 brojeva. Kako je $2017 = 5 \cdot 403 + 2$, to broj $6^{2017}$ završava istim znamenkama kao i $6^2$, tj. posljednje dvije znamenke broja $6^{2017}$ su redom 3 i 6.

**3.1.4. Zadatak**

Odredite posljednje tri znamenke broja

$$2^{2017} - 2^{2015} + 2^{2012}.$$

*Rješenje:*

Nakon izlučivanja zajedničkog faktora dobivamo

$$\begin{aligned} 2^{2017} - 2^{2015} + 2^{2012} &= 2^{2012}\left(2^5 - 2^3 + 1\right) \\ &= 2^{2012} \cdot 25 \\ &= 2^{2010} \cdot 2^2 \cdot 25 \\ &= 2^{2010} \cdot 100. \end{aligned}$$

Potencije broja dva koje su veće od 1 imaju zadnje znamenke redom 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6... pa zaključujemo kako zadnju znamenku 6 imaju one potencije čiji je eksponent djeljiv s 4. Budući da je $2010 = 502 \cdot 4 + 2$, zadnja znamenka broja $2^{2010}$ jednaka je 4, a množenjem sa 100 dobivamo da su zadnje tri znamenke redom 4, 0 i 0.

**3.1.5. Zadatak**

Skratite razlomak

$$\frac{2017^{3n+2} - 2017^5}{2017^{2n+3} + 2017^{n+4} + 2017^5}.$$

*Rješenje:*

Izlučivanjem zajedničkog faktora i korištenjem formule za razliku kubova dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{2017^{3n+2} - 2017^5}{2017^{2n+3} + 2017^{n+4} + 2017^5} &= \frac{2017^2 \cdot \left(2017^{3n} - 2017^3\right)}{2017^3 \cdot \left(2017^{2n} + 2017^{n+1} + 2017^2\right)} \\ &= \frac{\left(2017^n - 2017\right) \cdot \left(2017^{2n} + 2017^n \cdot 2017 + 2017^2\right)}{2017 \cdot \left(2017^{2n} + 2017^n \cdot 2017 + 2017^2\right)} \\ &= 2017^{n-1} - 1. \end{aligned}$$



Poucak 72.indd 10 3.1.2018. 14:33:06

### 3.1.6. Zadatak

Dokažite da ako je zbroj nekih 2017 prirodnih brojeva djeljiv sa 6, onda je i zbroj njihovih kubova djeljiv sa 6.

*Rješenje:*

Izlučivanjem zajedničkog faktora i korištenjem formule za razliku kvadrata, za svaki prirodan broj $a$ vrijedi da je broj $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ djeljiv sa 6, jer je umnožak triju uzastopnih brojeva uvijek djeljiv sa 6. Stoga je i

$$a_1^3 - a_1 + a_2^3 - a_2 + \ldots + a_{2017}^3 - a_{2017}$$

djeljiv sa 6. Možemo ga napisati u obliku

$$\left(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{2017}^3\right) - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2017}\right).$$

Kako je zbroj $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2017}$ djeljiv sa 6, to je i zbroj kubova $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{2017}^3$ djeljiv brojem 6.

### 3.1.7. Zadatak

Ako je

$$\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\left(a+b\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right)-\frac{a}{b}\right]:\left(\frac{a}{b}+1\right)=\frac{1}{2017},$$

koliko je $\frac{a}{b}$?

*Rješenje:*

Računanjem umnoška

$$\left(a+b\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$$

zadana jednakost prelazi u

$$\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)-\frac{a}{b}\right]:\left(\frac{a}{b}+1\right)=\frac{1}{2017},$$

odnosno

$$\frac{1-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}=\frac{1}{2017}.$$



Poucak 72.indd 11 3.1.2018. 14:33:06

Slijedi

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+1&=2017-2017\cdot\frac{a}{b}\\ 2018\cdot\frac{a}{b}&=2016\\ \frac{a}{b}&=\frac{2016}{2018}.\end{aligned}$$

**3.1.8. Zadatak**

Rastavite na faktore izraz $x^4+2017x^2+2016x+2017$.

*Rješenje:*

Rastaviti na faktore višečlani algebarski izraz znači zapisati ga u obliku umnoška. Dodavanjem i oduzimanjem monoma $x^3$ i korištenjem formule za razliku kubova dani izraz postaje

$$\begin{aligned}x^4+2017x^2+2016x+2017&=x^4+x^3+x^2+2016\left(x^2+x+1\right)+1-x^3\\ &=x^2\left(x^2+x+1\right)+2016\left(x^2+x+1\right)+\left(1-x\right)\left(x^2+x+1\right)\\ &=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2017\right).\end{aligned}$$

**3.1.9. Zadatak**

Odredite prirodan broj $x$ tako da vrijedi jednakost $x^{2017}-x^{2016}=2017$.

**3.1.10. Zadatak**

Odredite posljednju znamenku broja $15^{2017}+90^{2017}+66^{2017}$.

**3.1.11. Zadatak**

Odredite posljednje dvije znamenke broja $7^{2016^{2017}}$.

Zadatci u koje također možemo uključiti broj 2017, a koji su primjereni učenicima prvog razreda srednje škole, zadatci su u kojima se trebaju primijeniti pravila za djeljivost prirodnih brojeva.

**3.1.12. Zadatak**

Odredite šesteroznamenkaste brojeve oblika $\overline{a2017b}$ koji su djeljivi s 36.

*Rješenje:*

Broj je djeljiv s 36 ako i samo ako je djeljiv s 4 i s 9. Prema tome, broj $\overline{7b}$ djeljiv je s 4 (dvoznamenkasti završetak), a zbroj $a+2+0+1+7+b=10+a+b$ djeljiv je s 9.



Poucak 72.indd 12 3.1.2018. 14:33:06

Na osnovi djeljivosti broja $\overline{7b}$ s 4 dobivamo $b \in \{2,6\}$. Iz toga slijedi

$1^\circ$ $b = 2: \quad 9 \mid 10 + a + 2 \quad \Rightarrow \quad a = 6,$

$2^\circ$ $b = 6: \quad 9 \mid 10 + a + 6 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$

Traženi brojevi su 620 172 i 220 176.

**3.1.13. Zadatak**

Koliko najviše elemenata može imati podskup skupa {1, 2, 3..., 2017} tako da za svaka dva elementa $a$ i $b$ tog podskupa broj $a + b$ nije djeljiv brojem $a - b$?

*Rješenje:*

Tvrdimo da je odgovor 673.

U podskupu ne smijemo imati uzastopne elemente $a$ i $b = a + 1$ jer 1 dijeli $a + b$.

Također, u podskupu ne smijemo imati $a$ i $b = a + 2$ jer 2 dijeli $a + b = 2a + 2$.

Dakle, među tri uzastopna broja u podskupu se može nalaziti najviše jedan. Zato podskup s traženim svojstvom može imati najviše 673 elemenata.

Podskup $A = \{1, 4, 7..., 2014, 2017\}$ sastavljen od brojeva koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1 ima 673 elemenata.

Za bilo koja dva elementa $a, b \in A$ broj $a - b$ je djeljiv s 3, a broj $a + b$ daje ostatak 2, pa $a - b$ ne dijeli $a + b$.

## 3.2. Zadatci za drugi razred srednje škole

Na početku drugog razreda srednje škole učenici upoznaju skup kompleksnih brojeva, susreću se s pojmom *imaginarna jedinica*, definiraju ga i uočavaju kako za proizvoljnu potenciju imaginarne jedinice vrijedi

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

a takvo svojstvo potenciranja daje nam brojne mogućnosti za sastavljanje zadataka s kompleksnim brojevima, pa tako i onih u kojima se pojavljuje broj 2017.

**3.2.1. Zadatak**

Izračunajte vrijednost izraza

$$i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \ldots + i^{2014} + i^{2015} + i^{2016} + i^{2017}.$$



Poucak 72.indd 13 3.1.2018. 14:33:06

*Rješenje:*

Kako za proizvoljnu potenciju $i^n$ vrijedi prethodno navedena formula, razvrstat ćemo pribrojnike iz zadatka u četiri skupine:

1. $i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{2015} = -i$ (504 člana)
2. $i^4 = i^8 = i^{12} = \ldots = i^{2016} = 1$ (504 člana)
3. $i^5 = i^9 = i^{13} = \ldots = i^{2013} = i^{2017} = i$ (504 člana)
4. $i^6 = i^{10} = i^{14} = \ldots = i^{2014} = -1$ (504 člana).

Vrijednost izraza jednaka je $504 \cdot (-i) + 504 \cdot 1 + 504 \cdot i + 503 \cdot (-1) = 1$.

**3.2.2. Zadatak**

Za koje će prirodne brojeve $n$ izraz $\left(\dfrac{3+i}{2-i}\right)^n$ biti realan broj? Koliko je takvih $n$ koji su manji od 2017?

*Rješenje:*

$$\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n = \left(\frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i}\right)^n = (1+i)^n.$$

Razmotrit ćemo dva slučaja:

$1^\circ$ $n = 2k$: $(1+i)^n = (1+i)^{2k} = \left((1+i)^2\right)^k = \left(1^2 + 2i + i^2\right)^k = (2i)^k$. Ovo će biti realan broj ako i samo ako je $k$ paran, tj. $n = 4l$.

$2^\circ$ $n = 2k+1$: $(1+i)^n = (1+i)^{2k+1} = (2i)^k \cdot (1+i)$. Ne postoji takav $k$ za koji je ovaj izraz realan broj.

Prirodnih brojeva manjih od 2017 koji su djeljivi s 4 ima 503.

U drugom polugodištu drugog razreda obrađuje se nastavna cjelina „Eksponencijalna i logaritamska funkcija“. Kako bi učenici uspješno rješavali zadatke s logaritamskom funkcijom, trebaju znati njezina svojstva.

**3.2.3. Zadatak**

Dokažite da je

$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log_2\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \log_2\left(1+\frac{1}{k}\right) + \ldots + \log_2\left(1+\frac{1}{2017}\right) < 11.$$

*Rješenje:*

Prema svojstvu za logaritam kvocijenta dobivamo



Poucak 72.indd 14 3.1.2018. 14:33:06

$$\log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)=\log_2\left(\frac{k+1}{k}\right)=\log_2(k+1)-\log_2(k).$$

Zbrajanjem takvih izraza za sve $k\in\{1,2,...,2017\}$ imamo

$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+...+\log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)+...+\log_2\left(1+\frac{1}{2017}\right)$$
$$=(\log_2 2-\log_2 1)+(\log_2 3-\log_2 2)+...+(\log_2 2018-\log_2 2017)$$
$$=\log_2 2018-\log_2 1$$
$$=\log_2 2018.$$

Budući da je $2018<2048=2^{11}$, slijedi $\log_2 2018<\log_2 2^{11}=11$ pa smo time dokazali zadanu nejednakost.

**3.2.4. Zadatak**

Riješite jednadžbu

$$\log_{2017}x+\log_{\sqrt[2]{2017}}x+\log_{\sqrt[3]{2017}}+...+\log_{\sqrt[2017]{2017}}x=2017.$$

*Rješenje:*

Primjenom svojstava logaritamske funkcije lijevu stranu jednadžbe možemo zapisati ovako:

$$\log_{2017}x+2\log_{2017}x+3\log_{2017}x+...+2017\log_{2017}x$$
$$=(1+2+3+...+2017)\log_{2017}x$$
$$=\frac{2017\cdot 2018}{2}\log_{2017}x.$$

Sada je polazna jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$\frac{2017\cdot 2018}{2}\log_{2017}x=2017.$$

Iz prethodne jednakosti slijedi $x=2017^{\frac{2}{2018}}$, tj. $x=\sqrt[2018]{2017^2}$.

**3.2.5. Zadatak**

Usporedite brojeve $a=2^{\sqrt{\log_2 2017}}$ i $b=2017^{\sqrt{\log_{2017}2}}$.

*Rješenje:*

Koristeći svojstva logaritamske funkcije imamo



Poucak 72.indd 15 3.1.2018. 14:33:07

$$\begin{aligned}\log 2^{\sqrt{\log_2 2017}} &= \sqrt{\log_2 2017}\cdot\log 2\\ &=\sqrt{\frac{\log 2017}{\log 2}}\cdot\log 2\\ &=\sqrt{\frac{\log 2017}{\log 2}\cdot\left(\log 2\right)^2}\\ &=\sqrt{\log 2017\cdot\log 2}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\log 2017^{\sqrt{\log_{2017} 2}} &= \sqrt{\log_{2017} 2}\cdot\log 2017\\ &=\sqrt{\frac{\log 2}{\log 2017}}\cdot\log 2017\\ &=\sqrt{\frac{\log 2}{\log 2017}\cdot\left(\log 2017\right)^2}\\ &=\sqrt{\log 2\cdot\log 2017}.\end{aligned}$$

Zaključujemo $\log a=\log b$, tj. $a=b$.

### 3.2.6. Zadatak

Pokažite da je umnožak rješenja jednadžbe

$$x^{\log_{2017} x}\cdot\sqrt{2017}=x^{2017}$$

prirodan broj.

*Rješenje:*

Logaritmiranjem jednadžbe po bazi 2017 i primjenom svojstava logaritamske funkcije dobivamo

$$\begin{aligned}\log_{2017}\left(x^{\log_{2017} x}\cdot 2017^{\frac{1}{2}}\right) &= \log_{2017} x^{2017}\\ \log_{2017} x^{\log_{2017} x}+\log_{2017} 2017^{\frac{1}{2}} &= 2017\log_{2017} x\\ \log_{2017} x\cdot\log_{2017} x+\frac{1}{2}\log_{2017} 2017 &= 2017\log_{2017} x\\ \left(\log_{2017} x\right)^2-2017\left(\log_{2017} x\right)+\frac{1}{2} &= 0.\end{aligned}$$

Uvođenjem zamjene $\log_{2017} x=t$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2\text{-}2017t+\frac{1}{2}=0,$$



Poucak 72.indd 16 3.1.2018. 14:33:07

iz koje slijedi, korištenjem Vieteovih formula, $t_1 + t_2 = 2017.$ Vraćajući zamjenu u prethodnu jednakost dobivamo

$$\log_{2017} x_1 + \log_{2017} x_2 = 2017$$
$$\log_{2017}(x_1 \cdot x_2) = 2017.$$

Zaključujemo da je $x_1 \cdot x_2 = 2017^{2017}$.

**3.2.7. Zadatak**

Neka su $x$ i $y$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$2^{x^2} = 16^y \qquad \text{i} \qquad \log_{\sqrt{2017x}} + \log_{2017} y > 0.$$

Dokažite da je $y > \frac{1}{2}$.

**3.2.8. Zadatak**

Izračunajte umnožak rješenja jednadžbe $2016 \cdot x^{\log_{2017} x} = x^{2016}$.

## 3.3. Zadatci za treći razred srednje škole

Za učenike trećih razreda srednje škole, broj 2017 uklopit ćemo unutar trigonometrijskih zadataka, tj. zadataka s funkcijama *sinus, kosinus, tangens* i *kotangens.*

**3.3.1. Zadatak**

Odredite sve parove $(x, y)$ realnih brojeva za koje vrijedi

$$\sin\left(x^2 - 5y\right) - 1 \geq \frac{x^4}{2017}.$$

*Rješenje:*

Najveća vrijednost funkcije sinus jednaka je 1 pa vrijedi $\sin\left(x^2 - 5y\right) - 1 \leq 0.$ S obzirom da je $\frac{x^4}{2017} \geq 0,$ nejednakost ima smisla ako i samo ako su joj obje strane jednake 0. Stoga je $x = 0.$

Nadalje, iz $\sin(-5y) = 1$ slijedi $-5y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$ a onda i $y = -\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}.$

Zaključujemo da su traženi parovi realnih brojeva oblika $\left(0, -\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$



Poucak 72.indd 17 3.1.2018. 14:33:07

**3.3.2. Zadatak** (Županijsko natjecanje iz matematike, 3. razred, B varijanta, 2016.)

Pokažite da vrijednost izraza

$$\sin^2\left(x-\frac{2016\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2017\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2018\pi}{3}\right)$$

ne ovisi o $x$.

*Rješenje:*

Korištenjem svojstva periodičnosti funkcije sinus i adicijskog identiteta za sinus razlike imamo

$$\begin{aligned}
&\sin^2\left(x-\frac{2016\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2017\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2018\pi}{3}\right)\\
&=\sin^2\left(x-672\pi\right)+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}-672\pi\right)+\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}-672\pi\right)\\
&=\sin^2 x+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\\
&=\sin^2 x+\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\cos x\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2\\
&=\sin^2 x+\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2.
\end{aligned}$$

Sređivanjem izraza te primjenom temeljnog trigonometrijskog identiteta dobivamo

$$\sin^2\left(x-\frac{2016\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2017\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2018\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\sin^2 x+\frac{3}{2}\cos^2 x=\frac{3}{2}$$

pa vrijednost zadanog izraza ne ovisi o $x$.

**3.3.3. Zadatak**

Riješite jednadžbu

$$\frac{\sin\left(x-\frac{2017\pi}{2}\right)+\cos^3 x}{\sin\left(2x+2017\pi\right)}=\frac{1}{2}.$$

*Rješenje:*

Pojednostavimo lijevu stranu jednadžbe koristeći svojstvo periodičnosti funkcije sinus, temeljni trigonometrijski identitet i trigonometrijski identitet za sinus dvostrukog kuta:

$$\frac{\sin\left(x-\frac{2017\pi}{2}\right)+\cos^3 x}{\sin\left(2x+2017\pi\right)}=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^3 x}{\sin\left(2x+\pi\right)}$$
$$=\frac{-\cos x+\cos^3 x}{-\sin 2x}$$
$$=\frac{-\cos x\left(1-\cos^2 x\right)}{-2\sin x\cos x}$$
$$=\frac{\sin^2 x}{2\sin x}=\frac{1}{2}\sin x.$$

Sada rješavamo jednadžbu $\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}$, tj. $\sin x=1$. Rješenja su $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Međutim, to je nultočka nazivnika pa zadatak nema rješenja.

**3.3.4. Zadatak**

Dokažite sljedeću jednakost

$$\sqrt{\left(\sqrt{2017}-2017\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2016}-2016\right)^2}+\sqrt{2017}-\sqrt{2016}=\frac{1+\cos 40^\circ}{2\cos^2 20^\circ}.$$

*Rješenje:*

Korištenjem trigonometrijskog identiteta polovičnog kuta za funkciju kosinus, desna strana zadane jednakosti jednaka je 1 pa treba dokazati jednakost

$$\sqrt{\left(\sqrt{2017}-2017\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2016}-2016\right)^2}+\sqrt{2017}-\sqrt{2016}=1.$$

Kako je

$$\sqrt{\left(\sqrt{2017}-2017\right)^2}=\left|\sqrt{2017}-2017\right|=-\left(\sqrt{2017}-2017\right)=2017-\sqrt{2017}$$

i analogno,

$$\sqrt{\left(\sqrt{2016}-2016\right)^2}=2016-\sqrt{2016},$$

dobivamo

$$2017-\sqrt{2017}+\sqrt{2017}-2016+\sqrt{2016}-\sqrt{2016}=1,$$

čime je jednakost dokazana.

**3.3.5. Zadatak**

Neka su $a$, $b$, $c$ duljine stranica trokuta, a $\alpha,\beta,\gamma$ redom nasuprotni kutovi. Ako je $a^2+b^2=2017c^2$, izračunajte $\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$.

## 3.4. Zadatci za četvrti razred srednje škole

U četvrtom razredu srednje škole neke od nastavnih cjelina koje se obrađuju na nastavi matematike su „Nizovi" i „Funkcije". Zadatke s brojem tekuće godine grupirat ćemo u te dvije cjeline.

Pogledajmo prvo zadatke s nizovima.

### 3.4.1. Zadatak

Dan je niz brojeva tako da je svaki član toga niza, počevši od drugog, jednak zbroju njegova dva susjedna člana (zbroju njegovog prethodnika i sljedbenika). Zbroj prvih 8 članova je 7, a zbroj prvih 29 članova je 3. Odredite zbroj prvih 2017 članova tog niza.

*Rješenje:*

Označimo s $a$ prvi i s $b$ treći član tog niza. Na osnovi uvjeta zadatka dani niz je oblika

$$a, a+b, b, -a, -\left(a+b\right), -b, a, a+b, b, \ldots$$

Dakle, niz je periodičan s periodom duljine 6. Primijetimo da je zbroj prvih 6 članova jednak 0, jer imamo tri para suprotnih brojeva, pa je zbog periodičnosti zbroj svakih 6 uzastopnih članova jednak 0. Kako je zbroj prvih 8 članova jednak 7 i $8 = 6 + 2$, slijedi $a+a+b=2a+b=7.$ Nadalje, zbroj prvih 29 članova jednak je 3 i $29=4\cdot 6+25,$ prema tome

$$a+a+b+b+\left(-a\right)+\left(-\left(a+b\right)\right)=b=3$$

pa je $a = 2$. Konačno, zbog $2017=6\cdot 336+1,$ zaključujemo da je zbroj prvih 2017 članova niza jednak $a = 2$.

### 3.4.2. Zadatak

Zadan je niz 2, 5, 8, 11, 14... Odredite 2017. član tog niza.

*Rješenje:*

Zadani niz je aritmetički niz s prvim članom $a_1 = 2$ i razlikom $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 =$ $= 3$. Prema formuli za opći član aritmetičkog niza slijedi

$$a_{2017}=2+\left(2017-1\right)\cdot 3=6050.$$

### 3.4.3. Zadatak

Tri različita realna broja $a$, 2017 i $b$ su tri uzastopna člana geometrijskog niza. Ako su brojevi $a+2017, b+2017$ i $a + b$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza, odredite brojeve $a$ i $b$.

*Rješenje:*

Niz $a+2017, b+2017, a+b$ je aritmetički, a budući da je svaki član aritmetičkog niza, osim prvog, jednak aritmetičkoj sredini člana neposrednoprije njega i člana neposredno nakon njega, slijedi



Poucak 72.indd 20 3.1.2018. 14:33:07

$$b+2017=\frac{a+2017+a+b}{2}$$
$$a=\frac{b+2017}{2}.$$

Niz $a, 2017, b$ je geometrijski kojem je $q=\frac{2017}{a}=\frac{b}{2017}.$ Kako je kvadrat svakog člana geometrijskog niza, osim prvog, jednak umnošku člana neposredno prije njega i člana neposredno nakon njega, slijedi $ab=2017^2$.

$$\frac{b+2017}{2}\cdot b=2017^2,$$
$$b^2+2017b-2\cdot 2017^2=0.$$

Iz prethodne jednakosti dobivamo

$$b=\frac{-2017\pm\sqrt{2017^2+8\cdot 2017^2}}{2}=\frac{-2017\pm 3\cdot 2017}{2}$$
$$b_1=2017,\quad b_2=-4034.$$

Iz $b\neq 2017$ slijedi $b=-4034.$ Tada je $a=\frac{b+2017}{2}=-\frac{2017}{2}.$

Ljepota matematike je u tome što unutar jednog zadatka možemo kombinirati više cjelina koje se obrađuju tijekom jedne školske godine pa se tako na ovogodišnjem školskom natjecanju za učenike četvrtih razreda srednje škole - A varijanta pojavio zadatak u kojem se spominje broj 2017, a koji od učenika zahtijeva poznavanje nizova, ali i principa matematičke indukcije koji se također obrađuje u četvrtom razredu.

**3.4.4. Zadatak** (Školsko natjecanje iz matematike, 4. razred, A varijanta, 2017.)

Nizovi $(x_n)$ i $(y_n)$ zadani su rekurzivno:

$$x_1=3,\quad y_1=1,$$
$$x_{n+1}=3x_n+y_n,\quad \text{za sve } n\in\mathbb{N};$$
$$y_{n+1}=3x_n+3y_n,\quad \text{za sve } n\in\mathbb{N}.$$

Dokažite da je $x_{2017}^2-y_{2017}^2=8^{2017}$.

*Rješenje:*

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj $n$ vrijedi $x_n^2-y_n^2=8^n$.

Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $x_1^2-y_1^2=3^2-1^2=8$.

Pretpostavimo da za neki prirodan broj $n$ vrijedi $x_n^2-y_n^2=8^n$.



Poucak 72.indd 21 3.1.2018. 14:33:08

Tada je

$$\begin{aligned}x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 &= \left(3x_n + y_n\right)^2 - \left(x_n + 3y_n\right)^2\\ &= 9x_n^2 + 6x_n y_n + y_n^2 - \left(x_n^2 + 6x_n y_n + 9y_n^2\right)\\ &= 8x_n^2 - 8y_n^2 = 8\left(x_n^2 - y_n^2\right)\\ &= 8\cdot 8^n = 8^{n+1}.\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije slijedi $x_n^2 - y_n^2 = 8^n$ za svaki prirodan broj $n$. Budući da smo tvrdnju dokazali za sve prirodne brojeve $n$, tvrdnja posebno vrijedi i za $n = 2017$, što je traženo u zadatku.

### 3.4.5. Zadatak

Neka je $a = \sqrt[2017]{2017}$ i neka je $\left(a_n\right)$ niz takav da je $a_1 = a$ i $a_{n+1} = a^{a_n}$ za $n \geq 1$. Postoji li prirodan broj $n$ takav da je $a_n \geq 2017$?

*Rješenje:*

Takav prirodan broj ne postoji.

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj $n$ vrijedi $a_n < 2017$.

Baza indukcije. Za $n = 1$ vrijedi $a = \sqrt[2017]{2017} < 2017$.

Pretpostavimo da za neki prirodan broj $n$ vrijedi $a_n < 2017$. Tada je

$$a_{n+1} = a^{a_n} < a^{2017} = 2017.$$

Po principu matematičke indukcije slijedi $a_n < 2017$ za svaki prirodan broj $n$.

Kako bi uspješno rješavali zadatke s funkcijama, učenici trebaju znati definirati pojam *funkcija*, te osnovna svojstva elementarnih funkcija.

### 3.4.6. Zadatak

Neka su $a$, $b$ i $c$ realni brojevi i $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija zadana formulom $f\left(x\right) = ax^5 + bx^3 + c\sin x - 1.$ Ako je $f\left(-2017\right) = 2017,$ odredite $f\left(2017\right)$.

*Rješenje:*

Budući da je $\left(-x\right)^5 = -x^5,$ $\left(-x^3\right) = -x^3$ i $\sin\left(-x\right) = -\sin x,$ vrijedi

$$f\left(-2017\right) = -2017^5 a - 2017^3 b - c\sin 2017 - 1.$$

Iz toga je

$$f\left(2017\right) = 2017^5 a + 2017^3 b + c\sin 2017 - 1 = -f\left(-2017\right) - 1 - 1 = -2019.$$

### 3.4.7. Zadatak

Izračunajte $a - b + c - 1$ ako je $f\left(x+1\right) = x^2 + 2017x$ i $f\left(x+2\right) + f\left(x+3\right) = ax^2 + bx + c.$



Poucak 72.indd 22 3.1.2018. 14:33:08

*Rješenje:*

Iz uvjeta $f(x+1)=x^2+2017x$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
f(x)=f((x-1)+1) &= (x-1)^2+2017(x-1)\\
&= x^2-2x+1+2017x-2017\\
&= x^2+2015x-2016.
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
f(x+2) &= (x+2)^2+2015(x+2)-2016\\
&= x^2+4x+4+2015x+4030-2016\\
&= x^2+2019x+2018
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
f(x+3) &= (x+3)^2+2015(x+3)-2016\\
&= x^2+6x+9+2015x+6045-2016\\
&= x^2+2021x+4038,
\end{aligned}
$$

slijedi

$$f(x+2)+f(x+3)=2x \quad +4040x+6056,$$

odnosno $a=2, b=4040$ i $c=6056$ pa je

$$a-b+c-1=2-4040+6056-1=2017.$$

**3.4.8. Zadatak**

Prvi član niza je 7, a svaki sljedeći član dobije se tako što se prethodni kvadrira, zbroje se znamenke i doda 1. Tako su sljedeća dva člana 14 i 17. Odredite 2017. član niza.

**3.4.9. Zadatak**

Odredite vrijednost polinoma $P(x,y)=x^{2016}+2017y$, ako je $x^2+2x+y^2-4y+5=0$.

## Literatura


1. A. Horvatek, *Natjecanja iz matematike u RH*, 2008, dostupno na: http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/\\zadatci-SS.htm
2. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1 – udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2001.
3. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2 – udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazije - 1. dio,* Element, Zagreb, 2004.
4. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3 – udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije - 2. dio,* Element, Zagreb, 2008.
5. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4 – udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije - 1. dio,* Element, Zagreb, 2010.




Poucak 72.indd 23 3.1.2018. 14:33:08