Otkrivanje karakterističnih točaka trokuta korištenjem enciklopedije ETC

Željka Ćaćić[1] i Vjekoslav Kovač[2]

Već u osnovnoj školi učenici se upoznaju s četiri klasične karakteristične točke trokuta: *središtem upisane kružnice*, *težištem*, *središtem opisane kružnice* i *ortocentrom*. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja natjecatelji će se možda susresti s još nekim „posebnim" točkama trokuta poput *središta kružnice devet točaka*, *Lemoineove točke*, *Gergonneove točke* ili *Nagelove točke*. Zainteresirani čitatelj može njihove definicije i brojna zanimljiva svojstva naučiti iz knjige D. Palmana [6]. Tijekom dva i po tisućljeća intenzivnog proučavanja geometrije trokuta pronađene su još mnoge zanimljive točke pa je korisno imati njihov popis koji omogućava pretraživanje dosad poznatih točaka, istraživanje njihovih međusobnih odnosa te jednostavno dodavanje novih unosa. U ovom radu upoznat ćemo se s web-enciklopedijom *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers* [4] (kratko nazvanom *ETC*), s naglaskom na njezinu funkciju pretraživanja unosa. Potom ćemo taj alat primijeniti na nekoliko problema: kako bismo identificirali odgovarajuću točku te dobili smjernice na literaturu o njezinim daljnjim svojstvima.

Enciklopedija ETC

Američki matematičar C. Kimberling se u radu [3] zapitao koja su to svojstva neke točke trokuta koja je čine „istaknutom" i vrijednom naziva „karakteristična točka" ili „centar trokuta". Ubrzo potom započeo je s izradom enciklopedije *ETC* [4], koja nastoji obuhvatiti i sistematizirati što više takvih točaka. Njezinih prvih 8 unosa, označenih $X(1)$–$X(8)$, redom čine upravo gore spomenuti centri, dok u vrijeme pisanja ovog rada enciklopedija sadrži čak 14 029 točaka. O njezinom eksponencijalnom rastu svjedoči činjenica da je još prije tri godine imala dvostruko manje unosa.

Rigorozna definicija karakteristične točke (iz članka [3]) je sljedeća. Neka je u ravnini trokuta ABC dana točka P i neka su d_a, d_b, d_c redom njezine orijentirane udaljenosti od pravaca BC, CA, AB. Pritom uzimamo da je d_a pozitivno ako se točke

[1]Željka Ćaćić, Osnovna škola dr. Franje Tuđmana, Lički Osik

[2]Vjekoslav Kovač, Matematički odsjek PMF-a, Sveučilište u Zagrebu

P i A nalaze s iste strane pravca BC, negativno ako se nalaze s različitih strana, a jednako 0 kada P baš leži na pravcu BC. Za trojku realnih brojeva (t_a, t_b, t_c) kažemo da su *trilinearne koordinate* točke P ako postoji $k \neq 0$ takav da je $t_a = kd_a$, $t_b = kd_b$, $t_c = kd_c$. S obzirom da su trilinearne koordinate jednoznačne do na skalarni višekratnik (tj. primjer su tzv. homogenih koordinata), obično ih pišemo $t_a : t_b : t_c$. Kažemo da je P *karakteristična točka trokuta* ili *centar trokuta* ako ima trilinearne koordinate oblika

$$f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b),$$

pri čemu je f neka funkcija definirana na skupu svih mogućih trojki (a,b,c) duljina stranica trokuta koja ima sljedeća svojstva:

1. Postoji realni broj p takav da je $f(ka, kb, kc) = k^p f(a, b, c)$ za svaki $k > 0$ i za svaku trojku (a, b, c) iz domene. Drugim riječima, f je homogena stupnja p.
2. Vrijedi $f(a, c, b) = f(a, b, c)$ za svaku trojku (a, b, c) iz domene. Ovo je svojstvo svojevrsne parcijalne simetrije.
3. Funkcija f nije jednaka konstanti 0.

Treba napomenuti da različite funkcije f mogu određivati isti centar trokuta P; radi toga obično biramo f danu što jednostavnijom formulom. Upoznatom čitatelju napomenimo da su tzv. *baricentričke koordinate* točke P dane formulom $ad_a : bd_b : cd_c$ pa je lako pretvoriti trilinearne koordinate u baricentričke i obratno. Definicija i osnovna svojstva baricentričkih koordinata te izrazi za baricentričke koordinate 20 centara trokuta dani su u diplomskom radu autorice [5].

Enciklopedija *ETC* identificira karakteristične točke trokuta upravo pomoću njihovih trilinearnih koordinata. Prvih 8 točaka iz te enciklopedije ima sljedeće izraze za trilinearne koordinate. Pritom standardno α, β, γ označavaju mjere kutova trokuta ABC.

Unos	*Ime*	*Trilinearne koordinate*
$X(1)$	središte upisane kružnice	$1 : 1 : 1$
$X(2)$	težište	$1/a : 1/b : 1/c$
$X(3)$	središte opisane kružnice	$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$
$X(4)$	ortocentar	$1/\cos\alpha : 1/\cos\beta : 1/\cos\gamma$
$X(5)$	središte kružnice devet točaka	$\cos(\beta\text{-}\gamma) : \cos(\gamma\text{-}\alpha) : \cos(\alpha\text{-}\beta)$
$X(6)$	Lemoineova točka	$a : b : c$
$X(7)$	Gergonneova točka	$\cos^{-2}(\alpha/2) : \cos^{-2}(\beta/2) : \cos^{-2}(\gamma/2)$
$X(8)$	Nagelova točka	$\sin^{-2}(\alpha/2) : \sin^{-2}(\beta/2) : \sin^{-2}(\gamma/2)$

Premda *ETC* uz te izraze daje geometrijske definicije i brojne karakterizacije točaka, ona ipak ne sadrži izvode formula ili dokaze, već samo poneku smjernicu na literaturu. Za detaljne izvode u vezi točaka $X(1)$ – $X(8)$ čitatelja ponovno upućujemo na diplomski rad [5], premda on u prvi plan stavlja baricentričke koordinate.

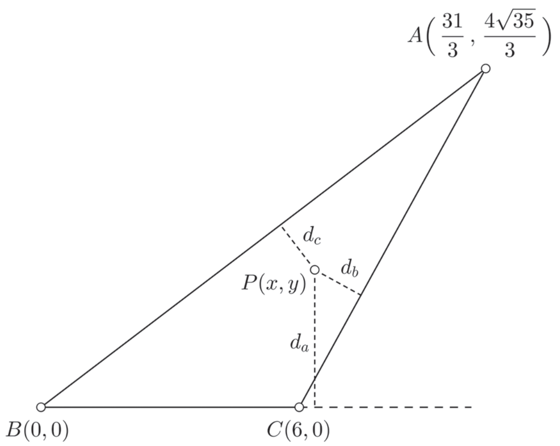
Jedna od najkorisnijih mogućnosti enciklopedije *ETC* je pretraživanje unosa na temelju numeričkih podataka. Uzme se trokut ABC s duljinama stranica $a = 6$, $b = 9$, $c = 13$. Premda je odabir prilično nasumičan, on je prikladan jer se kod tog trokuta ne podudaraju nikoje dvije karakteristične točke. Za promatranu točku P izračuna se d_a, tj. njezinu orijentiranu udaljenost od pravca BC. Pod računanjem mislimo na numerički izraz od 20 pouzdanih decimala nakon decimalne točke, dobiven računalnim softverom poput *Mathematice* [7]. *ETC* ima tablicu „Search 6, 9, 13" u koju su upisane vrijednosti d_a za sve unesene točke, tako da možemo utvrditi o kojem se poznatom centru radi ili pak ustanoviti da smo otkrili sasvim novu karakterističnu točku. U prvom slučaju dobit ćemo barem ime i osnovna svojstva te točke, kako bismo je potom mogli potražiti u postojećoj literaturi.

Istraživanje karakterističnih točaka

Ilustrirajmo netom opisani postupak na nekoliko primjera.

Primjer 1. Koja točka P u ravnini ima najmanji zbroj kvadrata udaljenosti od stranica trokuta ABC (ili njihovih produžetaka)?

Rješenje. Stavimo se u ulogu učenika koji je vješt s računalom, ali nema dovoljno geometrijskog iskustva kako bi samostalno riješio ovaj problem. On će trokut ABC sa stranicama duljina 6, 9, 13 staviti u Kartezijev koordinatni sustav tako da mu je vrh B u ishodištu, vrh C na pozitivnom dijelu apscise, a vrh A negdje u prvom kvadrantu, kao što je prikazano na slici 1. Nakon kraćeg računa dobit će i navedene koordinate točke A. Veličina d_a za bilo koju točku $P(x, y)$ je tada upravo njezina ordinata y.



Slika 1.

Učenik u programski paket *Mathematica* [7] najprije upisuje koordinate vrhova:

```
xa=31/3; ya=4Sqrt[35]/3;
xb=0; yb=0;
xc=6; yc=0;.
```

Korisna će mu biti formula za udaljenost točke $P_0(x_0, y_0)$ od pravca određenog točkama $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$:

$$d(P_0, P_1P_2) = \frac{|x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1)|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}.$$

Zato učenik definira funkciju d (bez apsolutne vrijednosti u brojniku) kao

```
d[x0_,y0_,x1_,y1_,x2_,y2_]=
      (x0(y1-y2)+x1(y2-y0)+x2(y0-y1))/
      Sqrt[(x1-x2)^2+(y1-y2)^2];,
```

a potom i traženi zbroj kvadrata s pomoću

```
s[x_,y_]=d[x,y,xb,yb,xc,yc]^2+
      d[x,y,xc,yc,xa,ya]^2+
      d[x,y,xa,ya,xb,yb]^2;.
```

Konačno, numerička minimizacija vrijednosti od s po svim točkama ravnine (x,y) provodi se naredbom

```
Nminimize[s[x,y],{x,y},WorkingPrecision->100],
```

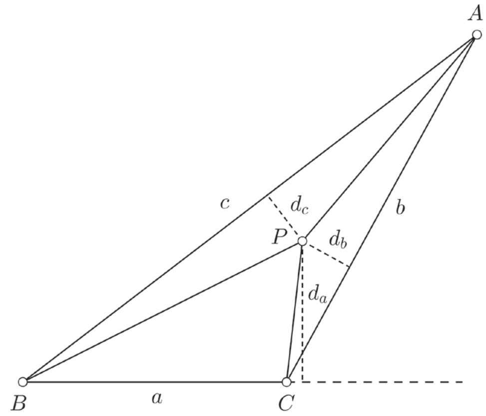
pri čemu opcija *WorkingPrecision → 100* znači da se radi s preciznošću od 100 znamenaka pa će svakako barem njih 20 u konačnom rezultatu biti pouzdano. Program izbacuje rezultat (kojem ispisujemo samo po 20 decimala):

```
{7.83216783216783216783...,
      {x->4.84615384615384615384...,
       y->0.99290849506566982532...}}.
```

Kao što smo već bili rekli, ordinata točke minimuma je upravo orijentirana udaljenost te točke od pravca BC pa smo dobili

$$d_a = y = 0.99290849506566982532...$$

Pretraživanjem u enciklopediji *ETC* učenik nalazi da je riječ o točki $X(6)$, što je *Lemoineova točka* (ili *simedijalna točka*), nazvana po francuskom matematičaru Émileu Lemoineu (1840.–1912.), a već smo naveli da su njezine trilinearne koordinate $a : b : c$. Čitatelj koji dosad nije čuo za tu točku može ovo uzeti kao njezinu definiciju. Prema klasičnoj pak definiciji ona je sjecište triju pravaca dobivenih kao osno simetrične slike težišnica s obzirom na simetrale kutova iz istih vrhova. Postojanje takvog sjecišta i ekvivalencija dviju navedenih definicija dokazani su u 16. poglavlju knjige [6].



Slika 2.

Postavlja se pitanje kako rigorozno dokazati da baš navedena točka minimizira sumu kvadrata udaljenosti od stranica. U tu svrhu treba primijetiti (pogledajte sliku 2) da za svaku točku ravnine imamo

$$\frac{1}{2}ad_a + \frac{1}{2}bd_b + \frac{1}{2}cd_c = \mathbf{P}(PBC) + \mathbf{P}(PCA) + \mathbf{P}(PAB) = \mathbf{P}(ABC),$$

pri čemu $\mathbf{P}(ABC)$ označava površinu trokuta ABC, itd. Osim za točke P unutar trokuta, ova formula ostaje vrijediti i za točke izvan njega ako udaljenosti od stranica d_a, d_b, d_c kao i dosad smatramo orijentiranima. Zbog Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakosti imamo

$$(2\mathbf{P}(ABC))^2 = (ad_a + bd_b + cd_c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)\,(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$$

pa uvijek vrijedi

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \geq \frac{4\mathbf{P}(ABC)^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

dok se jednakost postiže ako i samo ako je

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c,$$

tj. jedino kada je riječ o točki trokuta s trilinearnim koordinatama $a : b : c$.

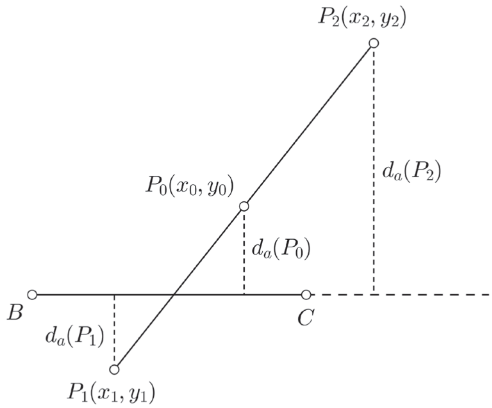
Za vježbu ostavljamo jedan zadatak koji je prilično sličan prethodnom primjeru.

Zadatak 2. Koja točka P unutar trokuta ABC ima najveći produkt udaljenosti od stranica toga trokuta (ili njihovih produžetaka)?

Čitatelju preporučujemo istu eksperimentalnu metodu i nagoviještamo da će odgovor ovog puta naći među 4 klasične karakteristične točke. Dokaz da je doista riječ o toj točki iznesen je kao teorem 10.4 u knjizi [6].

Ponekad je moguće maštovito u oba smjera pretraživati tablicu „Search 6, 9, 13", i krenuvši od poznate točke i krenuvši od poznate veličine d_a.

Primjer 3. Kako se zove točka dobivena kao centralno simetrična slika ortocentra s obzirom na središte opisane kružnice?



Slika 3.

Rješenje. Najprije primijetimo sljedeću pomoćnu tvrdnju (pogledajte sliku 3): ako je P_0 polovište spojnice točaka P_1 i P_2 te ako su $d_a(P_0)$, $d_a(P_1)$, $d_a(P_2)$ redom njihove orijentirane udaljenosti od pravca BC, tada vrijedi

$$d_a(P_0) = \frac{d_a(P_1) + d_a(P_2)}{2}.$$

Za dokaz te tvrdnje treba još jednom staviti trokut ABC u koordinatni sustav tako da mu je vrh B u ishodištu, vrh C na pozitivnom dijelu x-osi, a vrh A iznad x-osi. Ako su koordinate točaka redom $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, tada poznate formule za koordinate polovišta daju

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

a mi smo već bili komentirali da vrijedi $d_a(P_0) = y_0$, $d_a(P_1) = y_1$ i $d_a(P_2) = y_2$.

U našem slučaju je

$P_0 = X(3) =$ središte opisane kružnice,

$P_1 = X(4) =$ ortocentar,

$P_2 = P =$ nepoznata točka.

Iz lijevog stupca tablice „Search 6, 9, 13" očitamo vrijednosti:

$$d_a(X(3)) = 6.78236289419634553451,$$
$$d_a(X(4)) = -5.67661941092653634560$$

pa gornja formula

$$d_a(X(3)) = \frac{d_a(X(4)) + d_a(P)}{2}$$

zapisana u obliku

$$d_a(P) = 2d_a(X(3)) - d_a(X(4))$$

daje

$$d_a(P) = 19.2413451993192274146.$$

Prilikom pretraživanja desnog stupca tablice „Search 6, 9, 13" uzimamo npr. samo 15 znamenaka jer smo svjesni da je moglo doći do grešaka prilikom zaokruživanja. Svejedno dolazimo do jedinstvenog unosa u enciklopediji *ETC* i pronalazimo da je riječ o točki $X(20)$, naziva *De Longchampsova točka*, prema francuskom matematičaru Gastonu Gohierreu de Longchampsu (1842.–1906.).

Sada čitatelju neće biti teško pomoću jednostavnog računa otkriti o kojim je točkama riječ u sljedećem zadatku. Odgovori se mogu naći i u diplomskom radu [5].

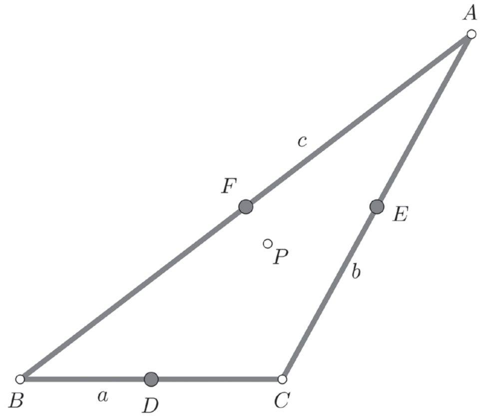
Zadatak 4. (a) Kako se zove točka dobivena kao centralno simetrična slika središta upisane kružnice s obzirom na središte opisane kružnice?

(b) Kako se zove točka dobivena kao centralno simetrična slika ortocentra s obzirom na središte upisane kružnice?

Sljedeći primjer motiviran je stvarnim fizikalnim problemom.

Primjer 5. Pretpostavimo da je rub trokuta ABC načinjen od homogene žice ravnomjerne (ali zanemarive) debljine. U kojoj je točki P ravnine smješten centar mase toga sustava?

Rješenje. Primijetimo da zapravo tražimo centar mase sistema sastavljenog od tri komada žice, redom duljina a, b, c; pogledajte sliku 4. Radi jednostavnosti možemo pretpostaviti da je njihova linearna gustoća jednaka 1, što znači da ti komadi redom imaju mase a, b, c. Centri mase tih dijelova su očigledno u polovištima stranica trokuta, koja označimo D, E, F. Još je Arhimed (287. pr. n. e.–212. pr. n. e.) znao za takozvani *princip aditivnosti*, iz kojega slijedi da je centar mase P takvog sistema ista točka kao i za sistem sastavljen od triju točkastih masa iznosa a, b, c redom postavljenih u točke D, E, F.



Slika 4.

Nadalje, u Kartezijevom koordinatnom sustavu imamo i poznate formule za koordinate $T(x_T, y_T)$ centra mase sistema od konačno mnogo masa $m_1, m_2, ..., m_N$ pozicioniranih u točkama $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), ..., A_N(x_N, y_N)$:

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}, \quad y_T = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + ... + m_Ny_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}.$$

Druga od formula u našem slučaju postaje

$$y_P = \frac{ay_D + by_E + cy_F}{a+b+c},$$

tj., uvažavajući formule za koordinate polovišta stranica,

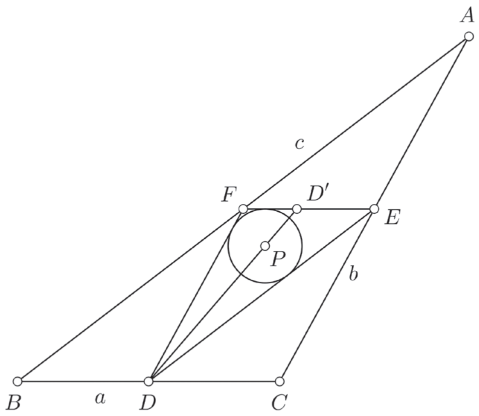
$$y_P = \frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{y_B + y_C}{2} + \frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{y_C + y_A}{2} + \frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{y_A + y_B}{2} =$$

$$= \frac{(b+c)y_A + (c+a)y_B + (a+b)y_C}{2(a+b+c)},$$

pri čemu su (x_A, y_A) koordinate točke A, itd. Sada je za konkretni trokut iz prvog primjera (kod kojeg je $a = 6$, $b = 9$, $c = 13$) lako izračunati na 20 decimala:

$$d_a = y_P = 3.09889893400456078420...$$

U tablici „Search 6, 9, 13" enciklopedije *ETC* otkrivamo da je traženi centar mase tzv. *Spiekerov centar* $X(10)$, nazvan prema njemačkom matematičaru Theodoru Spiekeru (1823. – 1913.). U enciklopediji nalazimo i zanimljivu geometrijsku karakterizaciju: to je središte kružnice upisane trokutu *DEF*; pogledajte sliku 5. Dokažimo da je doista riječ o istoj točki!



Slika 5.

Neka je D' centar mase sistema sastavljenog od mase c u točki F i mase b u točki E. Točka D' dijeli spojnicu tih točaka u omjeru $b : c$. Nadalje, koristeći princip aditivnosti, možemo točku P shvatiti kao težište sistema koji čine masa a u točki D i masa $b+c$ u točki D'. Posebno, P mora ležati na spojnici točaka D i D'. Zbog sličnosti trokuta ABC i DEF imamo

$$\frac{|FD'|}{|D'E|}=\frac{b}{c}=\frac{|FD|}{|DE|}$$

pa prema poučku o simetrali kuta vidimo da je DD' upravo simetrala kuta pri vrhu D trokuta DEF. Sasvim analogno zaključujemo da P leži i na simetralama kutova uz vrhove E i F pa je doista riječ o središtu tom trokutu upisane kružnice.

Ukratko ćemo izložiti i jedan dosta složeniji primjer iz fizike elektriciteta, s kojim se ranije susreo jedan od autora ovoga članka.

Primjer 6. Pretpostavimo da je trokut ABC izvor elektrostatskog naboja ravnomjerno raspoređenog po cijelom trokutu. Koja točka P ravnine ima najveći elektrostatski potencijal?

Skica rješenja. Po *Coulombovom zakonu* potencijal izvora naboja q smještenog u točki $Q(u, v)$ izmjeren u točki $P(x, y)$ iznosi

$$\frac{kq}{|PQ|}=\frac{kq}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}},$$

pri čemu je k neka, za nas nevažna, fizikalna konstanta. Zahvaljujući tzv. *principu superpozicije* za ukupni elektrostatski potencijal izmjeren u točki P treba integrirati po čitavom trokutu ABC, čime se (do na konstantu) dobiva formula:

$$V(x,y) = \iint_{ABC} \frac{du\,dv}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}}.$$

Rigorozni izvod ove formule i daljnja manipulacija njome izlaze izvan okvira našeg članka. Možemo jedino uočiti da ovaj put treba maksimizirati gornji dvostruki integral kao funkciju točke $P(x, y)$. H. Abraham i jedan od autora ovoga članka bavili su se upravo tim problemom u radu [1]. Premda inicijalno nisu znali odgovor, mogli su numerički izračunati da za trokut (6,9,13) točka maksimuma zadovoljava

$$d_a = 2.11073179669028917745...$$

te uočiti da se ona ne pojavljuje u enciklopediji *ETC*. Pretraživanjem tablice „Search 6, 9, 13" čitatelj može provjeriti da je ona naknadno tamo uvrštena kao $X(5626)$, a na glavnom popisu je nazvana *centar elektrostatskog potencijala*. Članak [1] izvodi njezina brojna svojstva, poput neobične relacije

$$\left(\frac{r_B + r_C - a}{r_B + r_C + a}\right)^{1/a} = \left(\frac{r_C + r_A - b}{r_C + r_A + b}\right)^{1/b} = \left(\frac{r_A + r_B - c}{r_A + r_B + c}\right)^{1/c},$$

pri čemu su r_A, r_B, r_C redom udaljenosti točke P od vrhova A, B, C. Nadalje, tamo je pokazano da ta točka doista zadovoljava formalnu definiciju centra trokuta, premda se ne očekuje da njezine trilinearne koordinate imaju eksplicitne algebarske izraze.

Zaključak

U ovom smo radu pokazali kako jedan eksperimentalni alat (pretraživanje tablice „Search 6, 9, 13") ugrađen u enciklopediju *ETC* može poslužiti prilikom rješavanja planimetrijskih problema. Primjere heurističkih i eksperimentalnih metoda u drugim matematičkim granama čitatelj može pronaći u stručnom radu [2] ranijeg broja ovog časopisa.

Literatura

1. H. Abraham, V. Kovač, *From electrostatic potentials to yet another triangle center*, Forum Geom. **15** (2015.), 73–89.
2. E. Begović, V. Kovač, *Uloga eksperimenta u matematičkom otkriću*, Poučak **55** (2013.), 4–17.
3. C. Kimberling, *Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle*, Math. Mag. **67** (1994.) 163–187.
4. *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers — ETC*, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/*ETC*.html
5. Ž. Ćaćić, *Baricentričke koordinate 20 centara trokuta*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2017.
6. D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
7. Wolfram Research, Inc., Mathematica, Ver. 9.0, Champaign, IL, 2012.