Je li nula prirodni broj?[1]

I još neka dobra pitanja na koja u nastavi matematike nije dan dobar odgovor

Boris Čulina[2], Gordana Paić[3] i Željko Bošnjak[4]

Ključne riječi: nula, razlomak, decimalni broj, vektor, sličnost, linearna funkcija

Sažetak. U članku su razmatrana neka pitanja na koja u nastavi matematike nisu dani dovoljno dobri odgovori: Je li nula prirodni broj? Ima li razlike između razlomaka i racionalnih brojeva? Je li vektor usmjerena dužina? Što je sličnost? Je li funkcija $f(x) = ax + b$ linearna ili afina funkcija? Svako pitanje ilustrira jedan tip problema kojemu u nastavi matematike treba na ispravan način pristupiti.

Je li nula prirodni broj?

U Nastavnom planu i programu za osnovnu školu [1] navedeno je kao obrazovno postignuće u petom razredu da nula nije prirodni broj. Tako stoji i u udžbenicima za osnovnu školu koji se moraju držati onoga što je propisano ovim dokumentom. Inzistiranje na tome da nula nije prirodni broj nema nikakve osnove, štoviše kontraproduktivno je za matematički razvoj učenika. Naime, nije u pitanju nikakav zakon prirode, nego samo konvencija koja je rezultat našeg modeliranja brojevnih sustava. A ta konvencija može biti da nula nije prirodni broj, ali i da nula jest prirodni broj. Kad se uzme neka knjiga koja ima i matematički sadržaj, dobro je provjeriti koristi li autor jednu ili drugu konvenciju. Skup prirodnih brojeva obično se označava simbolom $\mathbb{N}$. Oni koji uzimaju da nula nije prirodni broj, obično skup prirodnih brojeva zajedno s nulom označavaju $\mathbb{N}_0$. Oni pak koji uzimaju da nula jest prirodni broj, skup pozitivnih prirodnih brojeva obično označavaju simbolom $\mathbb{N}^+$.

Glavni razlog da se nula ne uzme za prirodni broj jest da brojenje počinjemo od 1. Međutim, kako onda izbrojiti koliko je CD-ova imala moja pokojna baka? Ugodno je uzeti broj 0 kao stanje prije početka brojenja i tako započeti brojenje. Ako u skupu koji prebrajamo nema elemenata, tada je rezultat prebrajanja broj 0. Nadalje, bez

[1]Predavanje održano na 7. kongresu nastavnika matematike RH, 2016. godine u Zagrebu.

[2]Boris Čulina, Veleučilište Velika Gorica, Velika Gorica

[3]Gordana Paić, OŠ Dr.Ivan Merz, Zagreb

[4]Željko Bošnjak, OŠ Pavleka Miškine, Zagreb

nule ne možemo koristiti toliko važan dekadski zapis brojeva, niti razviti odmah na početku pojam neutralnog elementa za zbrajanje. Zato smatramo da je zamisao o prirodnim brojevima ugodnije modelirati tako da se i broj 0 smatra prirodnim brojem.

Bez obzira na to uzmemo li da je nula prirodni broj ili ne, metodički je važno ne predočiti to učeniku kao neku veliku istinu o brojevima, ili pak kao neko obrazovno postignuće, već kao rezultat našeg modeliranja ideje o brojevima, konvenciju koje se (u danom kontekstu) trebamo držati. Na taj način učenik razvija predodžbu o matematici kao o ljudskoj djelatnosti u kojoj i on može aktivno sudjelovati, a ne kao o istinama koje su izvan dohvata običnih smrtnika.

Sličnih je situacija puno u matematici, pa i u nastavi matematike. Npr. zašto nema dijeljenja nulom, zašto je $a^0 = 1$, itd. Sve te situacije možemo lako razriješiti imajući na umu da je matematika ljudska djelatnost, rezultat našeg modeliranja raznih zamisli, a ne skup vječnih istina o svijetu. Matematiku stvaramo, a ne otkrivamo. I upravo je takvu trebamo prenijeti učeniku.

Ima li razlike između razlomaka i racionalnih brojeva?

U Nastavnom planu i programu za osnovnu školu [1] sve vrvi od raznih vrsta brojeva; razlomci, mješoviti brojevi, (konačni) decimalni brojevi i racionalni brojevi. Pritom se kao obrazovna postignuća ističe umijeće pretvaranja jednih brojeva u druge. U osnovi ove zbrke je nerazlikovanje zapisa i zapisanog, forme i sadržaja. Naime, razlomak, „mješoviti broj" i decimalni broj tek su zapisi racionalnih brojeva. Dakle, postoje samo jedni brojevi (sadržaj) koji imaju više zapisa (forma). Mi transformiramo jedan zapis u drugi zapis istog broja, a ne transformiramo brojeve: $\frac{3}{2}$, $1\frac{1}{2}$ i 1.5 su različiti zapisi istog broja.

Nerazlikovanje zapisa i zapisanog vodi cijelom nizu logičkih pogrešaka. Npr. razlomci $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{6}$ su različiti zapisi istog racionalnog broja. Razlomci (zapisi) mogu biti skrativi ili neskrativi, dok za racionalni broj to svojstvo uopće nema smisla. Ako identificiramo razlomke (zapise) s racionalnim brojevima (zapisanim), tada ispada da je isti racionalni broj $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ i skrativ i neskrativ.

Dakle, kratimo razlomke, a ne brojeve. Isto tako termin „mješoviti broj" pogrešno sugerira da je riječ o posebnoj vrsti broja. Ispravno je npr. govoriti o mješovitom zapisu racionalnog broja, a ne o mješovitom broju. Isto tako ne valja govoriti „decimalni broj" već „decimalni zapis broja". Istina, mi možemo definirati decimalni broj kao broj koji ima decimalni zapis, ali to je podskup skupa racionalnih brojeva koji ni po čemu nije važan, pa ga nema potrebe isticati.

Razlikovanje zapisa i zapisanog vrlo je važno za učenikovo matematičko obrazovanje, pogotovo zato što je u matematici dobar zapis vrlo značajan. Važno je da učenik razlikuje sadržajno (što je zapisano) od formalnog (kako je zapisano), koja su svojstva zapisanog, a koja zapisa. Po smislu zapisa (zapisanom) postavljaju se problemi, a o formi zapisa ovise formalni postupci rješavanja.

Što je sličnost?

Standardna definicija pojma sličnosti trokuta je da su trokuti slični ako imaju odgovarajuće kutove jednakih veličina. Takva definicija sugerira da je sličnost povezana s očuvanjem oblika jer je oblik trokuta određen njegovim kutovima, ali se rijetko ide dalje od same sugestije. Takva definicija, mada formalno korektna, ograničena je na trokut i skriva pravi smisao pojma sličnosti koji je temeljni pojam Euklidove geometrije, pojam po kojem se ona razlikuje od drugih geometrija. Sadržajno korektna definicija općeg pojma sličnosti je da su dva lika slična ako se odgovarajućom homotetijom jedan lik može preslikati u lik sukladan drugom. Ova definicija, istina, zahtijeva da se prvo opiše homotetija koja je dosta jednostavno i samo po sebi značajno geometrijsko preslikavanje, kao i pojam sukladnosti proizvoljnih likova koji se može opisati pomoću intuitivnog pojma gibanja. Jedan prijedlog kako se ovakvo uvođenje pojma sličnosti može didaktički obraditi dan je u [2].

Primjer definiranja pojma sličnosti ilustrira opći problem ispravnog definiranja: među svim formalno korektnim definicijama nekog pojma treba izabrati onu koja sadržajno najbolje izražava taj pojam.

Je li vektor usmjerena dužina?

Obično se pojam vektora uvodi identificiranjem vektora s pojmom usmjerene dužine. Takvo je uvođenje konkretno i jednostavno, ali pogrešno. Ispravna definicija ili objašnjenje pojma vektora zahtijeva da je vektor nešto apstraktnije od usmjerenih dužina: različite usmjerene dužine koje možemo translatirati jedne u drugu određuju isti vektor. Veza usmjerenih dužina i vektora zahtijeva isti korak apstrakcije kao i veza parova prirodnih brojeva i racionalnih brojeva: par prirodnih brojeva a i b određuje racionalni broj $\frac{a}{b}$, ali ne možemo identificirati pozitivne racionalne brojeve i parove prirodnih brojeva jer razni parovi mogu dati isti racionalni broj. Navedena veza usmjerenih dužina i vektora bitna je da bi vektori imali svojstva zbog kojih su nam značajni. Više o tome napisano je u [3].

Ovaj primjer ilustrira opću situaciju u nastavi matematike. Didaktika zahtijeva da se svaki pojam uvede na što jednostavniji način, ali se pritom ne smije dogoditi da usljed potrebe za pojednostavnjenjem dođe do bitne distorzije uvedenog pojma.

Je li funkcija $f(x) = ax + b$ linearna ili afina funkcija?

U nastavi elementarne matematike se funkcija oblika $f(x) = ax + b$ naziva linearna funkcija. Međutim, termin *linearnost* u matematici i znanosti rezerviran je za jedan vrlo značajan pojam: ako je funkcija linearna, znači da ima svojstvo $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$.

Takvo svojstvo imaju npr. izravna proporcionalnost i operatori deriviranja i integriranja, ali ne i funkcija $f(x) = ax + b$. Mada se uvijek može iz konteksta vidjeti na što se misli, valja nastojati imati razne riječi za razne pojmove. S obzirom da je osnovno svojstvo funkcije $f(x) = ax + b$ da joj je omjer promjene vrijednosti i promjene argumenta uvijek isti broj, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = const$, možda bi bilo adekvatno ovakve funkcije zvati jednolike funkcije. Međutim, kad se neki naziv uvriježi, teško ga je promijeniti.

Ovo je primjer česte situacije kada neki termin u matematici ne odgovara upotrebi tog termina u nastavi elementarne matematike. Takav je primjer i pojam smjera afine mnogostrukosti u vektorskom prostoru u odnosu na pojam smjera vektora [3]. Zato valja na to paziti pri odabiru termina u nastavi elementarne matematike.

Literatura:

1. *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006.
2. Boris Čulina, Gordana Paić, Željko Bošnjak: *Pojam sličnosti u nastavi matematike u osnovnoj školi,* Šesti kongres nastavnika matematike, zbornik radova, Hrvatsko matematičko društvo, 2014. (postoji prezentacija na http://www.matematika.hr/files/3614/0473/5587/POJAM_SLIČNOSTI.pdf)
3. Boris Čulina, Gordana Paić, Željko Bošnjak P*ojam sličnosti u nastavi matematike u osnovnoj školi*, Poučak, 65, 2016.