

Matematika na izvoru^{1,2}

JULIJA MARDEŠIĆ³, IVO BARAS⁴ I IVONA ŠITIN⁵

Sažetak

Matematika je predmet koji učenici pohađaju tijekom osnovnoškolskog i uglavnom cijelog srednjoškolskog obrazovanja. Školska matematika ne predstavlja samo skup pojmova, činjenica i pravila koje treba naučiti, nego pomaže izgraditi cjelovit sustav logičnog mišljenja i zaključivanja koji čovjek koristi cijeli život. Iako je jasno da se na počecima tog procesa neće inzistirati na strogosti i preciznosti matematičkih iskaza, trebalo bi paziti na točnost i logičnost, izbjegavajući da se dođe u proturječja s matematikom na kasnijim obrazovnim razinama. Ovaj rad pokušava, služeći se izdvojenim primjerima, pokrenuti razgovor o tome koliko je recentna udžbenička praksa u RH u skladu s ovim nastojanjima.

Ključne riječi: školska matematika, primjeri iz udžbeničke prakse

Uvod

Matematika je kraljica svih znanosti. (K. F. Gauss)

Matematika posjeduje ne samo istinu, nego i nadnaravnu ljepotu, hladnu i oporu, poput skulpture, opirući se našim slabostima, ne umiljavajući se osjetilima poput slikarstva ili glazbe, ostaje uzvišeno čista i kadra dostići strogo savršenstvo najvećih umjetnosti. (B. Russell)

U matematici se umjetnost postavljanja pitanja cijeni više od odgovaranja na njih. (G. Cantor)

Matematika je najbolja igra na svijetu. Zaraznija je od šaha, napetija od pokera i traje duže od Monopola. Besplatna je. Može se igrati bilo gdje – Arhimed se, na primjer, igrao u kadi. (R. J. Trudeau)

Matematika je također nastavni predmet koji učenici slušaju čitavu osnovnu i srednju školu. U nacionalnom kurikulumu školska je matematika pragmatično opisana kao jedan od čimbenika tehnološkog napretka društva utemeljenog na informatizaciji i tehnologiji, a time i važan element preživljavanja i poboljšanja kvalitete života

¹Predavanje održano na 7. kongresu nastavnika matematike RH, 2016. godine u Zagrebu

²Udžbenici, radne bilježnice i zbirke zadataka iz matematike za 1., 2., 3. i 4. razred osnovne škole, odobreni od strane Ministarstva znanosti obrazovanja i sporta za šk. god. 2015./16.

³Julija Mardešić, Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split

⁴Ivo Baras, Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split

⁵Ivona Šitin, Osnovna škola prof. Filipa Lukasa, Kaštel Stari

pojedina [1]. Konceptualni jaz između ovih dviju percepcija matematike je golem, odvajaju ih prašume, strme litice, silni ledenjaci i više divljih rijeka koje teku klan-cima. No ljudi, neki čak i vrlo mladi, ipak prolaze ovim opasnim krajevima. Iskusne vodiče, koji im pomažu da se snađu u bespuću, nazivaju nastavnici matematike, a karte su im matematički udžbenici (i pripadajuća nastavna sredstva). Iako je požrtvovnost nastavnika matematike (siromašnih, ali čvrstih gorštaka, sposobnih ponijeti i podnijeti mnogo) legendarna, ne smijemo podcijeniti važnost ažurnih i kvalitetnih udžbenika. Vrlo je važno da budu jasni i logični, a posebno treba paziti da obrađeni pojmovi ne dođu u proturječje s gradivom istog ili drugih predmeta na kasnijim obrazovnim razinama.

Prije otprilike sedam godina, u nas je došlo do liberalizacije tržišta školskih knjiga. Nosioci izdavačke djelatnosti postali su nakladnici koji u četverogodišnjim ciklusima Ministarstvu znanosti, obrazovanja i sporta predlažu komplete nastavnih sredstava, nakon čega ono pokreće postupak njihovog ocjenjivanja od strane stručnog povjerenstva, da bi u slučaju pozitivnog ishoda odobrilo njihovo korištenje u školama. U Republici Hrvatskoj postoji Udžbenički standard – provedbeni propis kojim se na temelju Zakona o udžbenicima za osnovnu i srednju školu „utvrđuju znanstveni, pedagoški psihološki, didaktičko-metodički, etički, likovno-grafički i tehnički zahtjevi i standardi za izradu udžbenika i dopunskih nastavnih sredstava, kao i vrsta te oblik, odnosno oblici u kojima mogu biti izdani” [2]. Na Popisu udžbenika i pripadajućih dopunskih nastavnih sredstava nalaze se udžbenici i pripadajuća dopunska nastavna sredstva (u razrednoj nastavi matematike to su odgovarajuće zbirke zadataka i radne bilježnice) koji su utvrđeni kao obavezni i imaju pozitivno stručno mišljenje o usklađenosti s nacionalnim kurikulumom i Udžbeničkim standardom [3]. Kako bi ovaj tekst bilo lakše pratiti, u njegovu će se nastavku riječju *udžbenici* obuhvatiti i zbirke zadataka i radne bilježnice.

U medijima je liberalizacija tržišta često napadana zbog navodnog pogodovanja velikim nakladnicima i zbog potencijala za korupciju. S druge strane, naveliko se argumentiralo kako će konkurencija sastavljača i nakladnika biti doprinos demokratizaciji i jamac povećanja kvalitete udžbenika. Ovaj rad nema ambiciju diskutirati o ovako važnim temama i problematici pristupa „odozdo”, sa strane na kojoj se nalaze nastavnici, učenici i njihovi roditelji: pokušat će pronaći pogreške u slučajno odabranim udžbenicima kako bi se potaknula diskusija koja bi pridonijela povećanju kvalitete udžbenika i nastave, te čvršćim vezama među nastavnicima matematike, na svim obrazovnim razinama.

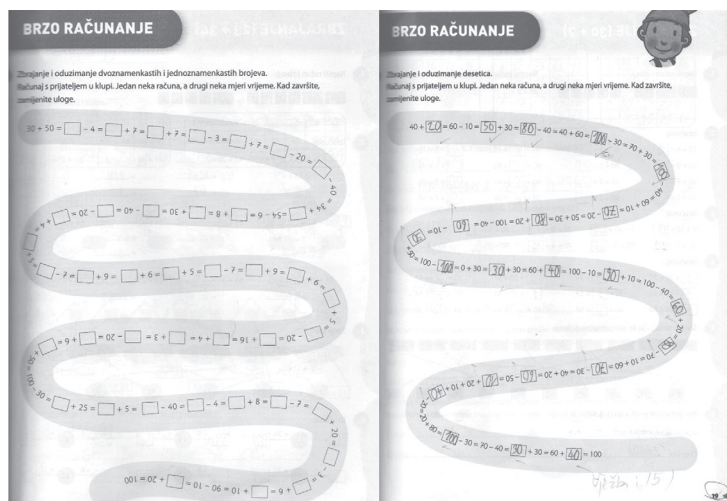
Primjeri

Slijedi više primjera tipova pogrešaka uočenih u udžbenicima uvrštenima u važeći Popis udžbenika i pripadajućih dopunskih nastavnih sredstava Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta za školsku godinu 2015./16. Grupiranje primjera obavljeno je prema kriteriju međusobne sličnosti.

Zadaci s ozbiljnim „felerom“

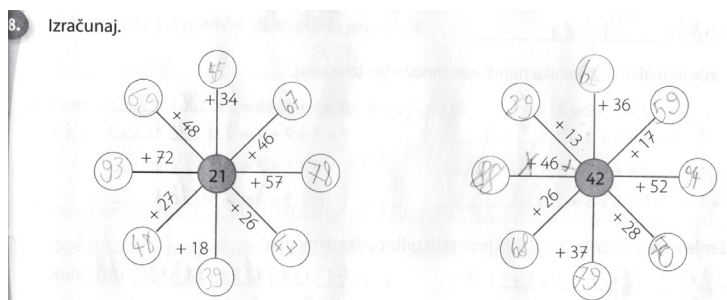
U ovu su skupinu svrstani zadaci koji pate od ozbiljnih matematičkih pogrešaka, onih koje bi se mogle odraziti na buduće učenikovo razumijevanje bitnih matematičkih koncepata.

Primjer 1. „Brzo računanje” (2. razred)



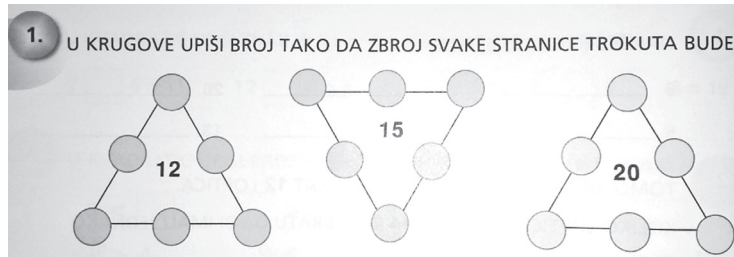
Ovaj zadatak problematičan je na više razina. Kao prvo, jednakost je relacija ekvivalencije i kao takva je tranzitivna, što znači da iz $a = b$ i $b = c$ slijedi da je $a = c$. Ovo svojstvo jednakosti u matematici koristimo stalno, bez obzira o kojim se objektima a, b, c radi. Riječ je jednostavno o načinu ispravnog zaključivanja. No, na prvoj je slici zbog toga $30 + 50 = \dots = 100$, što znači da je $80 = 100$. Za ovakve bisere učenici viših razreda i studenti dobivaju jedinice. A ovakvih „brzih računanja” je u jednoj radnoj bilježnici drugog razreda čak pet! U zadacima s „brzim računanjem” umetanje strelica umjesto jednakosti spasilo bi stvar. Onda bi to bio motivirajući zadatak uz koji učenik uzme štopericu i mjeri svoje vrijeme računanja. 😊

Primjer 2. Zbrajanje dvoznamenkastih brojeva (2. razred)



Evo primjera zadatka u kome su sastavljači prednost dali grafičkoj atraktivnosti prije nego matematičkoj preciznosti. Nejasno je što se – s čime – zbraja – da se do-
bije – što? Dijete u ovoj fazi jednostavno ne vjeruje da ono što piše u njegovoj knjizi
(udžbeniku!) može biti pogrešno i treba pomoć roditelja ili nastavnika da bi zada-
tak uopće moglo riješiti. Kolateralna žrtva je djetetovo samopouzdanje. (Premješteni
znak zbrajanja predstavlja roditeljevu intervenciju.)

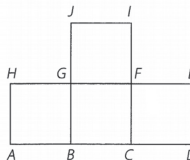
Primjer 3. Zbrajanje brojeva do 20 (1. razred)



Stranica trokuta je dužina. Zbrajanje je binarna algebarska operacija. Što bi dakle
imao biti zbroj stranice trokuta? Sastavljač valjda traži da se u svaki od krugova upiše
isti broj, ali tako da zbroj brojeva na istoj stranici trokuta bude broj naveden unutar
trokuta, i tako za svaku stranicu i svaki trokut. Za prvi trokut, taj broj je očito 4, za
drugi 5, a za treći 20/3. U prvom razredu? Što zapravo traži sastavljač zadatka?

Primjer 4. Okomite i usporedne dužine (4. razred)

Pogledaj sliku.



a) Napiši 10 dužina koje su međusobno okomite.

b) Napiši 10 dužina koje su međusobno usporedne.

Relacija „biti usporedan” je relacija ekvivalencije i zato ima smisla tražiti deset
međusobno usporednih dužina. Što, međutim, znači da je deset dužina međusobno
okomito? Traži li se pet parova međusobno okomitih dužina ili uvid u desetodimen-
zionalni Euklidski prostor?

Zadaci u sukobu s logikom

U ovu skupinu spadaju zadaci koji su do neke mjere nelogično formulirani.

Primjer 5. (3. razred)

2. Koja dva troznamenkasta broja a i b treba zbrojiti da zbrojevi budu:

$$a + b = 453$$

$$a + b = 826$$

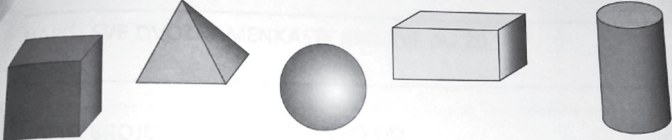
$$a + b = 309$$

$$a + b = 954$$

Ovdje ne postoje samo dva broja a i b koja treba zbrojiti: u prvom slučaju traženih parova brojeva (a, b) ima 254, u drugom 627, itd. Tekst bi trebao glasiti: „Pronađi barem dva troznamenkasta broja a i b tako da njihov zbroj bude...” Ovo je definitivno zadatak otvorenog tipa, ali ga takvim treba i predstaviti učenicima.

Primjer 6. Geometrijska tijela (1. razred)

1. DOVRŠI REČENICE, SLUŽI SE SLIKOM.



TIJELO OBOJANO PLAVOM BOJOM ZOVE SE _____.

TIJELO KOJE IMA RAVNU I ZAKRIVLJENU PLOHU ZOVE SE _____.

TIJELO KOJE IMA JEDNU ZAKRIVLJENU PLOHU ZOVE SE _____.

TIJELO OBOJANO ŽUTOM BOJOM ZOVE SE _____.


TIJELO KOJE NISI IMENOVAO/IMENOVALA ZOVE SE _____.

Tijelo koje ima samo jednu ravnu i samo jednu zakrivljenu plohu ne postoji na slici (to bi primjerice mogao biti stožac, no njega nema u nizu nacrtanih geometrijskih tijela). Zašto drugo pitanje nije glasilo: „Tijelo koje ima dvije ravne i jednu zakrivljenu plohu je...”? Naime, ako slijedimo logiku prema kojoj „tijelo koje ima ravnu i zakrivljenu plohu” ustvari znači „tijelo koje ima barem jednu ravnu i barem jednu zakrivljenu plohu”, u idućoj rečenici bi „tijelo koje ima jednu zakrivljenu plohu” moglo biti i valjak i kugla.

Primjer 7. Geometrijska tijela (3. razred)

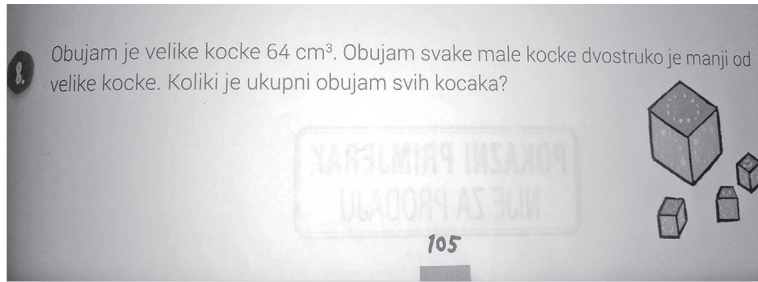
2. Oboji ravnu plohu valjka i odgovori.

Ravna ploha valjka ima oblik pravokutnik.



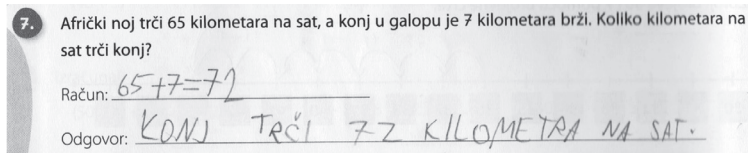
I opet se sugerira da valjak ima samo jednu ravnu plohu. Zašto jednina a ne množina? Zadatak bi mogao glasiti: „Oboji jednu ravnu plohu valjka” ili „Oboji vidljivu ravnu plohu valjka”.

Primjer 8. Geometrijska tijela (4. razred)



Slika je važna jer je jedini način da saznamo koliko kocaka ima. U drugu ruku, obujam svake male kocke na slici barem je 8 puta manji od obujma velike kocke pa predložimo da ilustracija bude malo vjerodostojnija kako učenici ne bi imali pogrešnu sliku. Formalno, ali barem jednako važno: na početku drugog reda nedostaje riječ „obujma”, jer se inače uspoređuju neusporedive stvari.

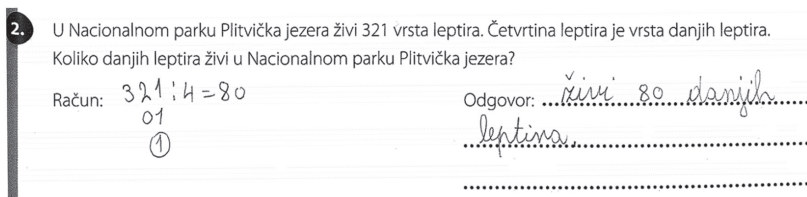
Primjer 9. Zbrajanje brojeva (2.razred)



Zadatak treba pročitati nekoliko puta da bismo spoznali svu njegovu nesuvislost. Kao prvo, afrički noj sigurno ne trči 65 km na sat. On možda ponekad, na kratke staze, trči brzinom od 65 km/h i teško je vjerovati da za sat zaista pretrči 65 km. Konj u galopu ne može biti 7 km brži, jer je km jedinica za duljinu, a ne brzinu. Učenici, kojima su koncepti trenutne i prosječne brzine još strani, ovaj zadatak ispravno shvate otprilike ovako: od mene valjda očekuju da im ta dva broja zbrojim, pa evo.

Jednostavno nesuvisli zadatci

Primjer 10. Dijeljenje brojeva s ostatkom (4. razred)



Ako je prethodni zadatak bio nesuvislo sročten, razumijevanju ovog zadatka ne pomaže ni višekratno iščitavanje. Najblaže rečeno, izgleda kao vlastita radna verzija koja je

u tisak otišla zabunom. Okvirnu namjeru sastavljača možemo procijeniti tek ako otiđemo na WWW stranice NP Plitvička jezera [4], gdje ćemo saznati da tamo zaista živi 321 vrsta leptira, od čega je 76 vrsta danjih, a 245 vrsta noćnih leptira. No čak ni da je u parku 80 vrsta danjih leptira, to ne bi činilo četvrtinu broja 321, jer četvrtina od 321 je 80.25.

Primjer 11. Zadatak za razmišljanje (3. razred)

Promotri zadatak. Koji još broj iz prvoga pravokutnika možeš spojiti s brojem iz drugoga pravokutnika?

Razmišljamo i razmišljamo, ali svejedno ne razumijemo što se ovdje traži. Da učenik sam odredi po kojem će pravilu povezivati brojeve? Mogućnosti je, naime, mnogo. Da poveže 458 i 452 jer je razlika 6? Da i drugi broj 329 spoji s 323? Svaki broj iz prvog pravokutnika s odgovarajućim iz drugog (kao u matrici)?

Zadatci koji se kose s činjenicama iz opće kulture

Primjer 12. Množenje brojeva (3. razred)

2. Jedna godina ima 52 tjedna. Koliko je to dana ako znaš da jedan tjedan ima 7 dana?

Kraće množimo:
 $52 \cdot 7 = 367$

Djeca u predmetu *Priroda i društvo* uče da kalendarska godina ima 365 ili 366 dana. Tekst zadatka trebalo bi preformulirati da ne bude zabune.

Primjer 13. Množenje brojeva (4. razred)

3. Radnim danom svječar izradi 85 malih i 64 velike svijeće od pčelinjeg voska. Koliko će ukupno svijeća izraditi u prosincu, ako ima 4 neradna dana?

Odgovor: u prosincu ukupno izradi: 4023 svijeće

U predmetu *Priroda i društvo* uči se da su neradni dani u tjednu subota i nedjelja. Računajući samo nedjelje i državne praznike, u prosincu je barem pet, a vrlo vjerojatno i šest neradnih dana. Ako je svječar poduzetnik koji radi i nedjeljama, onda zadatak nije trebao početi sa: „Radnim danom svječar izradi...”

Zadaci smiješni sami po sebi

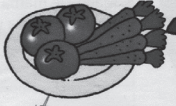
U ovu skupinu ulaze zadaci koji su pogrešni zbog nekog smiješnog propusta sastavljača.

Primjer 14. Mjerne jedinice (4. razred)

4. U restoranu jedna porcija povrća sa žara ima masu 300 dag.
Koliko će se porcija moći napraviti od 9 kg povrća sa žara?

Račun: $9 \text{ kg} : 300 \text{ dag} = 300 \text{ dag} : 300 \text{ dag} = 3$










Odgovor: 9 kg povrća moći će se napraviti 3 porcije.



Neka djeca vjerojatno neće poželjeti otići u restoran gdje se služe porcije povrća od 3 kg. 😊

Primjer 15. Veza dijeljenja s postupnim oduzimanjem (2. razred)

2. Od broja 10 postupno oduzimaj broj 2. Od broja 12 postupno oduzimaj broj 3.

	$10 - 2 = 8$		$12 - 3 = 9$
	$8 - 2 = 6$		$9 - 3 = 6$
	$6 - 2 = 4$		$6 - 3 = 3$
	$4 - 2 = 2$		$3 - 3 = 0$
	$2 - 2 = 0$		

Koliko si puta napisala/napisao broj 2 u oduzimanju? 5

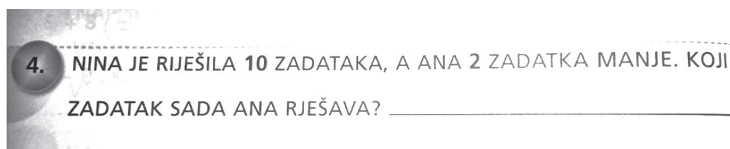
Koliko si puta napisala/napisao broj 3 u oduzimanju? 5

Ovo je sjajna prilika da iz prve ruke vidimo kako dijete u 2. razredu osnovne škole razmišlja. Ono je kao rješenje prvo navelo broj 7 (jer se broj 2 u oduzimanju pojavio točno sedam puta), a onda je taj rezultat izbrisalo i upisalo (točan) rezultat 5. Obrazloženje: „Pa pita me da prebrojim koliko sam puta napisala broj 2, a to je pet.” I zaista jest. U sljedećem zadatku dijete je također ponudilo točan odgovor 5, jer je broj 3 u oduzimanju napisalo točno pet puta. Ako je sastavljač htio dobiti rezultat 4, trebao je tražiti od djeteta da prebroji koliko je puta broj 3 oduzet dok se nije dobilo rezultat 0. No, to nije pitao. Nije li od učenika 2. razreda pretjerano očekivati da se domisle i odgovoru i pitanju?

Zadatci s manjkom ili viškom informacija

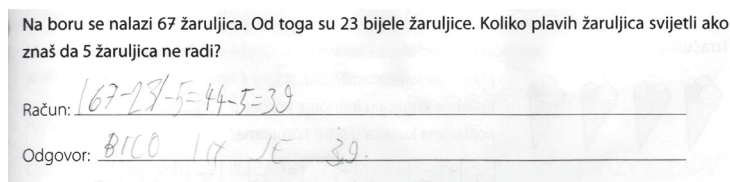
Sljedeći zadatci nemaju matematičkih pogrešaka, ali su nepotpuni – od rješavača se traži rezultat koji ne može izračunati jer za to nema dovoljno podataka. Učenika se faktički prisiljava da rješenje – izmisli.

Primjer 16. (1. razred)



A što ako Ana nije rješavala zadatke po redu? Što ako ne rješavaju iste zadatke? Što ako je Ana napravila stanku i ne rješava više?

Primjer 17. (2. razred)



Gdje piše da su na boru samo bijele i plave žaruljice? Koje su boje žaruljice koje ne rade?

Druga su krajnost zadatci u kojima je previše podataka – ili su nespretno zadani:

Primjer 18. (4. razred)

Jedan je stočar u tri mjeseca predao 1538 l mlijeka, a drugi 1544 l mlijeka. Za koliko će dana oba stočara imati predanu istu količinu mlijeka ako prvi stočar svaki dan preda 21 l, a drugi 19 l mlijeka? Kolika će biti ukupna količina predanoga mlijeka?

Račun:

Odgovor: _____

Zanimljiv, ali loše formuliran zadatak. Informacija da su stočari predali mlijeko u tri mjeseca je višak jer će učenika navesti na potpuno pogrešan trag. Pokuša li količine predanog mlijeka u tri mjeseca jednog i drugog stočara podijeliti s navedenim dnevnim kvotama od 21 l, odnosno 19 l mlijeka, neće ni približno dobiti broj dana u tri mjeseca. Te informacije su kontradiktorne. Trebalo bi pisati: „Jedan je stočar do danas (u otkupnu stanicu?) predao 1538 l mlijeka, a drugi 1544 l mlijeka. Ako prvi stočar od danas počne predavati po 21 l mlijeka dnevno, a drugi po 19 l mlijeka dnevno, za koliko će dana...”

Umjesto zaključka

U prethodnom je tekstu u nizu primjera navedeno više ozbiljnih pogrešaka učenih u udžbenicima, zbirka zadataka i radnim bilježnicama iz matematike za razrednu nastavu odobrenima od strane Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta, koji su trenutno u upotrebi u Republici Hrvatskoj. Treba istaknuti da se ne radi o običnim „tipfelerima” i jezičnim pogreškama, čija bi se prisutnost i mogla tolerirati, već o konceptualno-matematičkim greškama, te konkretnim tekstualnim nejasnoćama u zadacima namijenjenima samostalnom radu učenika.

Ne izbjegavajući kritike za eventualnu krivu ili prestrogu prosudbu, autori navode da:

- ni izbliza nisu pregledali sve udžbenike, zbirke zadataka i radne bilježnice iz matematike za razrednu nastavu koje postoje na tržištu (koji put i više kompleta istog nakladnika); njihov je izbor bio slučajan i uvelike je ovisio o dostupnosti materijala, tako da ne pretendira na reprezentativnost. Autori ovim putem zahvaljuju većem broju kolega na uvidu u nastavne materijale njih i njihove djece.
- Cilj rada bilo je detektiranje upečatljivih primjera pogrešaka, te iniciranje diskusije na tu temu, nipošto sustavno istraživanje kvalitete nastavnih sredstava matematike, niti detaljna analiza ispunjenosti didaktičko-metodičkih zahtjeva.
- Cilj rada nije bila usporedba pojedinih udžbenika, njihovih sastavljača i izdavača, brojenje pogrešaka ni proglašavanje pobjednika – mada je istina da ima boljih i lošijih – podatci o nastavnim sredstvima iz kojih potječu primjeri namjerno su izostavljeni, iako ih autori u svakom trenutku mogu predočiti.
- Autori su uvjereni da pogreške nisu nastale zbog neznanja, nestručnosti ni aljkavosti uključenih strana, već da im je vjerojatni razlog žurba i ljudski faktor. Štoviše, autori su uglavnom bili zadovoljni općenitom kvalitetom udžbenika, kao i nekim svježim rješenjima koja se u njima pojavljuju. Radi se samo o tome da se spomenute udžbeničke pogreške ne smiju tolerirati u obrazovnom sustavu koji drži do sebe i da ih treba što prije ispraviti.
- Neki od autora su u svojstvu roditelja pojedinima od nakladnika u više navrata uputili konstruktivne kritike, a da nisu dobili nikakav odgovor, što svjedoči o manjku interesa i volje da se uočene pogreške isprave ili barem prodiskutiraju.
- Autori nisu bliski ili skloni ikojem nakladniku, djeluju samo s pozicije običnih nastavnika i roditelja.

Literatura

1. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta: Predmetni kurikulum – Matematika, preuzeto 14. 4. 2016. s http://mzos.hr/datoteke/6-Predmetni_kurikulum-Matematika.pdf
2. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta: Udžbenički standard, preuzeto 14. 4. 2016. s <http://public.mzos.hr/fgs.axd?id=20132>
3. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta: Zakon o udžbenicima za osnovnu i srednju školu, preuzeto 14. 4. 2016. s <http://www.zakon.hr/z/288/Zakon-o-ud%C5%BEbenici-ma-za-osnovnu-i-srednju-%C5%A1kolu>
4. Nacionalni park Plitvička jezera, preuzeto 14. 4. 2016. s <http://www.np-plitvicka-jezera.hr/hr/prirodne-i-kulturne-vrijednosti/flora-i-fauna/>