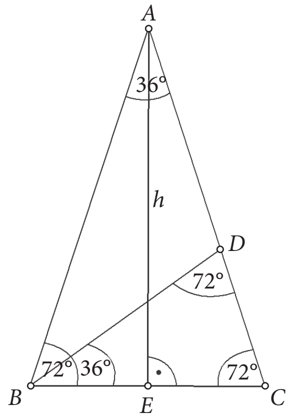
Nedoumice nastale nakon pogrešno postavljenog zadatka

dr. Šefket Arslanagić, Sarajevo

Danas se, kao umirovljenik Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, prisjećam nekih zgoda i nezgoda s početka moje profesorske karijere u trebinjskoj gimnaziji. Sjećam se jednog zadatka iz geometrije čije je rješenje izazvalo mnogo nedoumica kod mojih vrijednih učenika, a u početku, priznajem, i kod mene. Radi se o sljedećem zadatku:

U jednakokračnom trokutu ΔABC **je** $|AB| = |AC| = 20$**,** $\measuredangle BAC = 36^\circ$ **i** $|BC| = 13$**. Neka je točka** $D \in AC$ **tako da je** $|BD| = |BC|$**. Izračunati duljinu dužine** $\overline{DC}$.

Nacrtao sam sljedeću sliku:



Slika 1.

Učenici su brzo zaključili (II. razred gimnazije, op.a.) da mora biti $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 72^0$ budući da je trokut ΔABC jednakokračan. Dalje su zaključili da je zbog uvjeta $|BD| = |BC|$ i trokut ΔCBD jednakokračan, te je $\measuredangle BDC = \measuredangle BCD = 72^\circ$, tj. $\measuredangle CBD = 180 - 2 \cdot 72^0 = 36^0$ (sl.1). Moji učenici ponudili su dva rješenja.

Rješenje 1. Budući da trokuti ΔDBC i ΔABC imaju jednake kutove, oni su slični, tj.

$$\Delta ABC \sim \Delta DBC .$$

Iz sličnosti ovih trokuta slijedi:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|DC|},$$

a odavde:

$$\left|DC\right| = \frac{\left|BC\right|^2}{\left|AB\right|} = \frac{169}{20} \approx 8,45\,. \tag{1}$$

Rješenje 2. Zbog činjenice da je $\measuredangle CBD = \measuredangle ABD = 36^0$, slijedi da je pravac BD simetrala unutarnjeg kuta $\measuredangle ABC$ danog trokuta ΔABC. Koristeći se poučkom o simetrali unutarnjeg kuta trokuta, dobivamo:

$$\frac{\left|AB\right|}{\left|BC\right|} = \frac{\left|AD\right|}{\left|DC\right|}$$

$$\Rightarrow \frac{\left|AB\right|}{\left|BC\right|} + 1 = \frac{\left|AD\right|}{\left|DC\right|} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{\left|AB\right| + \left|BC\right|}{\left|BC\right|} = \frac{\left|AD\right| + \left|DC\right|}{\left|DC\right|}$$

$$\Rightarrow \frac{20+13}{13} = \frac{20}{\left|DC\right|}$$

$$\Rightarrow \left|DC\right| = \frac{20\cdot 13}{33} = \frac{260}{33} \approx 7,88\,. \tag{2}$$

Učenici su (a i ja, op.a.) bili prilično iznenađeni uvidjevši da rezultati (1) i (2) nisu jednaki jer je stvarno $\frac{169}{20} \neq \frac{260}{33}$.

Pogledali su u mene tražeći objašnjenje. Ja sam počeo odugovlačiti s pričom i natjerao ih da provjere račun, tj. da izvide nije li se negdje potkrala pogreška. Ali nije, račun je bio dobar. Pitali su me: „Kako to, profesore – isti zadatak, a dva različita rješenja?"

Hvala dragom Bogu da sam otkrio gdje je pogreška! Iz pravokutnog trokuta ΔABE zbog $\left|BE\right| = \left|CE\right| = \frac{1}{2}\left|BC\right|$ slijedi:

$$\cos 72^0 = \frac{\frac{1}{2}\left|BC\right|}{\left|AB\right|}$$

$$\Rightarrow \left|BC\right| = 2\left|AB\right|\cos 72^\circ$$

$$\Rightarrow |BC| \approx 2 \cdot 20 \cdot 0,30902$$

$$|BC| \approx 12,36\,.\ (?!)$$

Dakle, osnovica trokuta ΔABC ne može biti 13 nego približno $12,36$.

Učenici su umjesto $|BC| = 13$ uvrstili $|BC| \approx 12,36$ u rješenja 1. i 2. te nakon kraćeg računanja dobili da je $|DC| \approx 7,64$.

Odahnuli smo i ja i učenici, zadovoljni što smo otkrili pogrešku.

Dokazat ćemo sada nešto ljepše: da mora biti $|BC| = 10\left(-1+\sqrt{5}\right) \approx 12,36$.

U Rješenju 1. iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔBCD dobili smo da je:

$$|BC|^2 = |AB| \cdot |DC|. \tag{3}$$

Neka je $|BC| = x$, tada je također i $|BD| = |DA| = x$ jer su trokuti ΔABD i ΔBCD jednakokračni ($|AD| = |BD| = |BC| = x$). Neka je $|AB| = |AC| = a$; tada dobijamo iz (3):

$$x^2 = a\left(a - x\right)$$

$$\Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}\right)$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a \pm a\sqrt{5}\right)$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right).$$

Budući da je $x_1 = \frac{a}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right) < 0$, to je:

$$x\left(= x_2\right) = \frac{a}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right),$$

a odavde je zbog $a = 20$

$$x = 10\left(-1+\sqrt{5}\right) \approx 12{,}36 .$$

Poslije ovoga dokaza atmosfera u učionici izuzetno se popravila, na moje veliko zadovoljstvo.

Ipak, na kraju sam učenicima priznao da sam ja pogriješio što zadatak nisam ranije kod kuće bolje prostudirao i sam našao pogrešku. Zadatak sam preuzeo iz jedne zbirke zadataka (o autoru zbirke neću iz pristojnosti ništa reći) i dao ga učenicima. Srećom, sve je ispalo dobro i poučno za učenike i za mene. Meni je ovo bila vrijedna opomena da ubuduće dobro pazim kod biranja zadataka kako se ovakve stvari ne bi ponovile.

Učenici su uz moju pomoć zaključili da u formulaciji zadatka nije trebalo zadati duljinu osnovice $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ΔABC jer se ona lako može izračunati iz činjenice da je $|AB| = |AC| = 20$ i $\measuredangle ABC \left(= \measuredangle ACB\right) = 72^0$.

U međuvremenu sam našao još jedno „rješenje” ovog zanimljivog zadatka kako je on u početku formuliran. U ovom smo članku nešto ranije pokazali da mora biti $|AD| = |BD| = |BC| = 13$. Tada slijedi (sl.1):

$$|DC| = |AC| - |AD|, \text{ tj.}$$

$$|DC| = 20 - 13 = 7 . \text{ (?!)}$$

Lijepo sjećanje starog profesora, zar ne?

Literatura

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike,* Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
3. Mattler, M., *Von Charme der „verblassten” Geometrie*, Verlag Eurobit, Temeswar, 2000.