ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.1 (2018) 23-34

Primijenjena geometrija - volumen iskopa građevinske jame

Mirela Katić Žlepalo, Boris Uremović, Nina Pancirov

Sažetak

Na svim studijima koje izvodi Graditeljski odjel Tehničkog veleučilišta u Zagrebu uvijek nastojimo povezati gradivo različitih kolegija kako bismo studentima pomogli usvojiti sva potrebna znanja i vještine, koje će kasnije znati na pravi način primijeniti u praksi. O tome smo već pisali u [2], [5], [6]. Ovim radom pokušat ćemo pokazati primjenu osnovnih geometrijskih pravila za rješavanje jednog čestog praktičnog problema u građevinarstvu - izračuna volumena iskopa građevinske jame. Takvi proračuni se rade u različitim praktičnim situacijama poput određivanja potrebnih količina građevinskih radova, potom za određivanje potrebnih učinaka građevinskih strojeva za iskop i transport materijala iz iskopa, te naposljetku za izračun i naplatu izvedenih građevinskih radova. Znanja i vještine iz geometrije studenti usvajaju na kolegijima Nacrtna geometrija u graditeljstvu I i II (kolegiji prvog i drugog semestra Preddiplomskog stručnog studija graditeljstva), dok znanja i vještine potrebne za izradu navedenih proračuna studenti usvajaju na kolegijima Građevinski strojevi, Organizacija građenja I i II, Tehnologija građenja i Organizacija gradilišta (kolegiji četvrtog, petog i šestog semestra Preddiplomskog stručnog studija graditeljstva).

Navedenu povezanost znanja i vještina pokazat ćemo na jednom jednostavnom primjeru izračuna volumena iskopa građevinske jame.

Ključni pojmovi: iskop građevinske jame, volumen piramide, volumen prizme

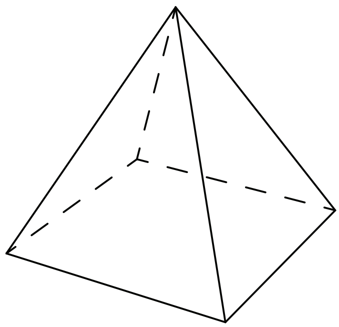
1 Uvod

Poznato je da se volumen piramide jednostavno računa pomoću formule (vidjeti npr. [1]):

$$V = \frac{1}{3} B \cdot v, \tag{1}$$

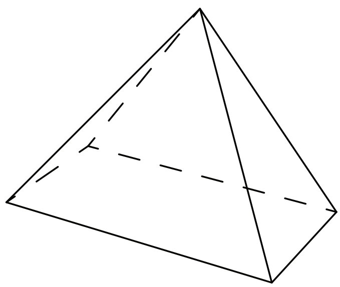
pri čemu je B površina osnovke piramide.

Uzmimo najjednostavniji primjer, uspravnu kvadratsku piramidu, dakle takvu piramidu kojoj je osnovka kvadrat kojemu je duljina stranice a, a visina v okomita na osnovku. Tada je volumen piramide $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot v$, a sve četiri pobočke (bočne strane piramide) imaju jednak nagib prema ravnini osnovke (Slika 1).



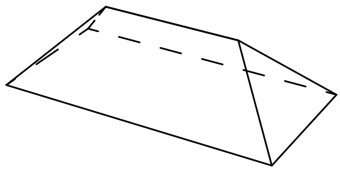
Slika 1: Kvadratska piramida

Ukoliko osnovka piramide nije kvadrat, nego pravokutnik kojemu su duljine stranica a i b, a visina piramide je v, tada je volumen piramide $V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot v$. U tom slučaju, po dvije nasuprotne pobočke imaju jednak nagib, ali sve četiri pobočke nemaju jednak nagib prema ravnini osnovke (Slika 2).



Slika 2: Piramida kojoj je osnovka pravokutnik

Što ako je osnovka pravokutnik, a želimo da sve četiri pobočke imaju jednak nagib, npr. 45° prema ravnini osnovke? U tom slučaju, ne dobivamo piramidu nego poliedarsku plohu kakvu u građevinarstvu koristimo za natkrivanje objekata, tj. krovište (Slika 3).

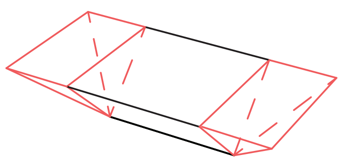


Slika 3: Krovište - sve bočne strane zatvaraju s osnovkom jednaki kut

U ovom članku bavit ćemo se izračunom volumena iskopa građevinske jame. Naime, ukoliko imamo građevinu pravokutnog tlocrta, potrebno je iskopati građevinsku jamu na način da od svakog ruba građevine radimo iskop nagiba 45°. Takav iskop možemo onda zamišljati kao "obrnuto krovište". Pokazat ćemo koliki je volumen takvog iskopa ako ga ne ograničimo, a također i ako ga ograničimo donjom, manjom osnovkom. Izračunat ćemo volumen i za neke drukčije primjere, koji nisu pravokutnog oblika, a također i volumen za slučaj kad je nagib različit od 45°.

2 Izračun volumena za tlocrt pravokutnog oblika

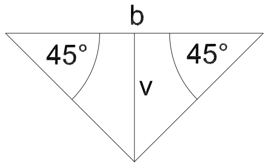
Ukoliko je tlocrt pravokutnog oblika, pri čemu je dulja stranica pravokutnika duljine a, a kraća stranica duljine b, možemo volumen računati na taj način da iskop podijelimo na tri dijela. Središnji dio je trostrana prizma, a druga dva dijela su piramide naslonjene na osnovke te prizme (Slika 4 - piramide su označene crvenim linijama).



Slika 4: Jedna prizma i dvije piramide

Izračunat ćemo prvo volumen prizme. Zbog nagiba od 45°, osnovka te prizme je pravokutan jednakokračan trokut (kutevi: 45°, 45°, 90°).

osnovka tog trokuta je jednaka b, a zbog nagiba od 45°, visina tog trokuta je $v = \frac{b}{2}$ (Slika 5).



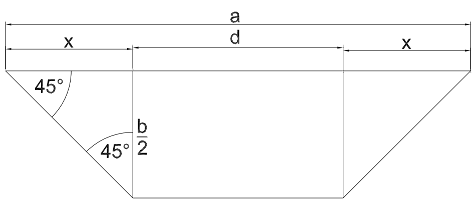
Slika 5: Osnovka prizme

Površina toga trokuta je:

$$P = \frac{b \cdot v}{2} = \frac{b \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{b^2}{4}. \tag{2}$$

Visinu prizme (ili u ovom slučaju, kako je prizma položena horizontalno, možemo govoriti o "duljini" prizme) lako izračunamo iz nacrta (ili osnog presjeka) cijelog iskopa (Slika 6) jer zbog nagiba od 45° mora biti $x = \frac{b}{2}$ pa je:

$$d = a - 2 \cdot \frac{b}{2} = a - b. \tag{3}$$



Slika 6: Nacrt iskopa

Stoga je lako izračunati volumen prizme:

$$V_1 = \frac{b^2}{4} \cdot (a - b). \tag{4}$$

Ostaje izračunati volumen dviju piramida. To su piramide kojima je osnovka pravokutnik čija je jedna stranica duljine b, druga duljine $\frac{b}{2}$, a visina piramide je $v = \frac{b}{2}$. Stoga je volumen jedne takve piramide jednak:

$$V_2 = \frac{1}{3} b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^3}{12}. \tag{5}$$

Volumen cijelog iskopa je onda:

$$V_{max} = V_1 + 2V_2 = \frac{b^2}{4} \cdot (a - b) + 2 \cdot \frac{b^3}{12}, \tag{6}$$

odnosno nakon sređivanja:

$$V_{max} = \frac{3ab^2 - b^3}{12}. \tag{7}$$

Taj izračun vrijedi za slučaj da nismo ograničili iskop donjom, manjom osnovkom.

Naravno, u praksi se iskop ograničava donjom, manjom osnovkom na nekoj dubini. Neka je ta dubina h. U tom slučaju donja, manja osnovka ima duljine stranica kako slijedi:

- dulja stranica je duljine $a - b + 2(\frac{b}{2} - h) = a - 2h$
- kraća stranica je duljine $2(\frac{b}{2} - h) = b - 2h$

Od volumena cijelog iskopa potrebno je oduzeti volumen donjeg dijela kojeg smo "odrezali" donjom osnovkom. Za "odrezani" dio volumen je:

$$V_0 = \frac{3(a - 2h)(b - 2h)^2 - (b - 2h)^3}{12}. \tag{8}$$

Formulu za volumen iskopa ograničenog donjom osnovkom dobivamo kad od volumena V_{max} cijelog iskopa (bez ograničenja donjom osnovkom) oduzmemo volumen V_0 dijela odrezanog donjom osnovkom:

$$\begin{aligned} V =& V_{max} - V_0 \\ V =& \frac{3ab^2 - b^3}{12} - \frac{3(a - 2h)(b - 2h)^2 - (b - 2h)^3}{12} \\ V =& abh - ah^2 - bh^2 + \frac{4h^3}{3}. \end{aligned}$$

U praksi se volumen iskopa računa jednostavnom, ali netočnom formulom:

$$V = \frac{B_1 + B_2}{2} h \tag{9}$$

gdje su B_1 i B_2 površine gornje i donje baze. Na taj način dobiva se ovakav izračun:

$$V_p = \frac{ab + (a - 2h)(b - 2h)}{2} h \tag{10}$$

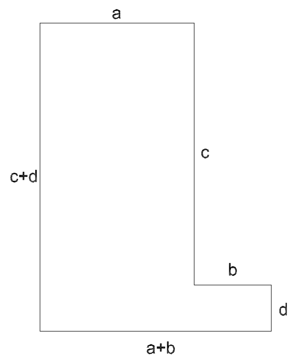
$$V_p = abh - ah^2 - bh^2 + 2h^3. \tag{11}$$

Razlika između volumena koji se izračuna pomoću približne formule u praksi i točnog izračuna je:

$$V_p - V = \frac{2h^3}{3}, \tag{12}$$

odnosno greška kubno raste s povećanjem dubine.

Sada ćemo računati volumen iskopa kojemu je tlocrt skiciran na Slici 7.



Slika 7: Tlocrt iskopa

Kad iskop ne bi bio ograničen donjom, manjom osnovkom, ukupan volumen iskopa bi bio:

$$V_{max} = -\frac{a^3}{12} + \frac{a^2c}{4} + \frac{a^2d}{4} + \frac{bd^2}{4}, \tag{13}$$

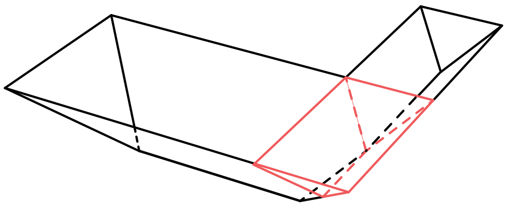
što se najlakše izračuna na taj način da se pomoću osnovne formule za iskop izračuna:

- volumen iskopa sa stranicama $c+d$ i a - označimo ga V_1,
- volumen iskopa sa stranicama $a+b$ i d - označimo ga V_2,
- volumen iskopa sa stranicama a i d - označimo ga V_3.

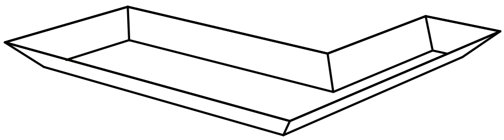
Navedenu formulu (13) dobivamo tako da od zbroja volumena V_1 i V_2 oduzmemo volumen V_3 koji je na Slici 8 označen crvenom bojom.

Na Slici 8 se ujedno vidi i to da dubina iskopa nije svugdje jednaka ukoliko ga ne ograničimo donjom osnovkom.

Na Slici 9 je prikazan iskop istog tlocrta, ali ograničen donjom osnovkom. Neka je visina (dubina) na kojoj je ograničen jednaka h. Prema



Slika 8: Računanje volumena iskopa



Slika 9: Iskop ograničen donjom osnovkom

danim dimenzijama tlocrta (Slika 7) trebao bi biti ispunjen uvjet $h < \frac{d}{2}$.

Na Slici 10 je prikazan tlocrt iskopa. Ako usporedimo dimenzije odgovarajućih stranica gornje (veće) i donje (manje) osnovke, dimenzije stranica b i c su ostale nepromijenjene, dok su dimenzije stranica a i d kod donje osnovke kraće za $2h$. To znači da volumen dijela koji je ispod donje osnovke, tj. kojeg smo "odrezali" donjom osnovkom možemo jednostavno izračunati tako da u formulu (13) uvrstimo $a-2h$ umjesto a i $d-2h$ umjesto d. Tada je volumen odrezanog dijela:

$$V_0 = -\frac{a^3}{12}+\frac{a^2c}{4}+\frac{a^2d}{4}+\frac{bd^2}{4}-ach-adh-bdh+ah^2+bh^2+ch^2+dh^2-\frac{4h^3}{3}. \tag{14}$$

Kad od ukupnog volumena odrežemo dio ispod donje osnovke, dobivamo konačnu formulu za volumen ograničenog iskopa:

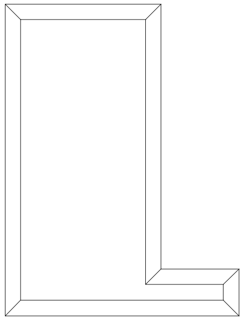
$$V = V_{max} - V_0 = ach + adh + bdh - ah^2 - bh^2 - ch^2 - dh^2 + \frac{4h^3}{3}. \tag{15}$$

Ukoliko računamo volumen iskopa prema približnoj formuli (8), dobivamo:

$$V_p = \frac{ac + ad + bd + (a-2h)c + (a-2h)(d-2h) + (d-2h)b}{2}h. \tag{16}$$

Razlika između točnog izračuna (15) i približnog izračuna (16) je:

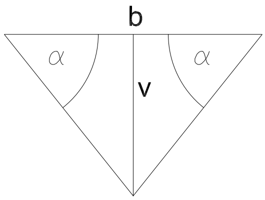
$$V - V_p = \frac{2h^3}{3}, \tag{17}$$



Slika 10: Tlocrt iskopa ograničenog donjom osnovkom

dakle kao i kod jednostavnog tlocrta u obliku pravokutnika, i ovdje greška kubno raste s dubinom iskopa.

Dosadašnji izračuni temeljili su se na pretpostavci da je nagib iskopa 45°. Analognim postupkom izračunat ćemo sada volumen za tlocrt pravokutnog oblika sa stranicama a i b ako je nagib iskopa jednak kutu α. Poprečni presjek takvog iskopa koji je ujedno i osnovka središnje prizme iskopa prikazan je na Slici 11.



Slika 11: Poprečni presjek iskopa

Maksimalna dubina v prikazana na Slici 11 je:

$$v = \frac{b}{2} \cdot \mathrm{tg}(\alpha). \tag{18}$$

Analogno izračunu danom u formulama (4), (5), i (6) koji smo dobili tako da smo zbrojili volumen središnje prizme s volumenima dvije piramide, sada dobivamo:

1) volumen prizme:

$$V_1 = \frac{b^2}{4} \cdot (a - b) \cdot \mathrm{tg}(\alpha), \tag{19}$$

2) volumen piramide:

$$V_2 = \frac{b^3}{12} \cdot \mathrm{tg}(\alpha), \tag{20}$$

3) volumen cijelog iskopa:

$$V_{max} = V_1 + 2V_2 = \frac{b^2}{4} \cdot (a-b) \cdot \mathrm{tg}(\alpha) + 2 \cdot \frac{b^3}{12} \cdot \mathrm{tg}(\alpha), \tag{21}$$

odnosno nakon sređivanja:

$$V_{max} = \frac{1}{12}(3a-b)b^2 \cdot \mathrm{tg}(\alpha). \tag{22}$$

Ako iskop ograničimo na dubini h, onda donja, manja osnovka ima dimenzije $a - 2h \cdot \mathrm{ctg}(\alpha)$ i $b - 2h \cdot \mathrm{ctg}(\alpha)$. Nakon što odrežemo donji dio, dobivamo točnu formulu za volumen iskopa tlocrtnih dimenzija a i b, nagiba α i dubine h:

$$V = h(ab - ah \cdot \mathrm{ctg}(\alpha) - bh \cdot \mathrm{ctg}(\alpha) + \frac{4}{3}h^2 \cdot \mathrm{ctg}^2(\alpha)). \tag{23}$$

Ukoliko računamo prema formuli (8) koja se koristi u praksi, dobivamo približnu formulu:

$$V_p = \frac{ab + (a - 2h \cdot \mathrm{ctg}(\alpha))(b - 2h \cdot \mathrm{ctg}(\alpha))}{2}h, \tag{24}$$

odnosno nakon sređivanja:

$$V_p = h(ab - ah \cdot \mathrm{ctg}(\alpha) - bh \cdot \mathrm{ctg}(\alpha) + 2h^2 \cdot \mathrm{ctg}^2(\alpha)) \tag{25}$$

Sada je jasno da je razlika između točnog i približnog izračuna jednaka:

$$V - V_p = \frac{2}{3}h^3 \cdot \mathrm{ctg}^2(\alpha), \tag{26}$$

odnosno razlika raste kubno s dubinom iskopa, ali sada ovisi i o nagibu α.

U Tablici 1 su prikazane vrijednosti razlika između točnog i približnog izračuna volumena iskopa, a u ovisnosti o dubini iskopa i njegovom nagibu. Vrijednosti dubine iskopa su uzete u rasponu do 6m iz razloga što ta vrijednost predstavlja objektivnu granicu upotrebe ovakvog načina iskopa. Građevinske jame većih dubina izvode se drugačijim tehnološkim postupcima kod kojih ne postoji navedena razlika u izračunima.

Kut α u građevinskoj praksi (točnije u geotehnici, prema [3], [4]) ovisi o sljedećim parametrima:

- vrsta materijala (npr. glina, prah, pijesak, šljunak...),
- koherentnost (koherentni ili vezani - npr. glina, nekoherentni ili nevezani - npr. šljunak, pijesak),
- zbijenost materijala (rahlo, prirodno sraslo, umjetno zbijeno),
- konzistencija materijala (tvrdo, mekano),
- vlažnost materijala (suho, vlažno, mokro).

Vrijednosti iz Tablice 1 pokazuju da povećanje dubine iskopa za jedan metar ima veći utjecaj na promjenu vrijednosti razlike volumena nego smanjenje kuta nagiba iskopa za 5°.

3 Zaključak

Formule (12), (17) i (26) pokazuju da tlocrtna površina građevine nema utjecaja na vrijednost razlike između točnog i približnog izračuna volumena iskopa. U praksi to znači da je za velike građevine poput stambenih ili poslovnih kompleksa čija je tlocrtna površina velika (npr. $50\text{m} \times 50\text{m}$) i dubine iskopa do 6 m, razlika između točnog i približnog izračuna zanemariva (približno $0,75\%$) u odnosu na ukupnu količinu iskopa građevinske jame (144m^3 razlike na 19032m^3 iskopa). Kod građevina sa specifičnim iskopima razlika može biti značajna u odnosu na ukupnu količinu iskopa građevinske jame. To su slučajevi kad je tlocrtna površina iskopa razmjerno mala (do 200m^2), dubina iskopa je veća od 3m, te postoji više takvih pojedinačnih iskopa za jednu građevinu. Kao dobar primjer može poslužiti građevina vijadukta veće ukupne duljine (duljine

Kut/Dubina iskopa	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m
20°	40, 26	135, 88	322, 08	629, 05	1087, 00
25°	24, 53	82, 78	196, 22	383, 24	662, 24
30°	16, 00	54, 00	128, 00	250, 00	432, 00
35°	10, 88	36, 71	87, 02	169, 97	293, 70
40°	7, 57	25, 56	60, 60	118, 36	204, 52
45°	5, 33	18, 00	42, 67	83, 33	144, 00
50°	3, 76	12, 67	30, 04	58, 67	101, 39
55°	2, 61	8, 83	20, 92	40, 86	70, 60
60°	1, 78	6, 00	14, 22	27, 78	48, 00

Tablica 1: Razlika između točnog i približnog izračuna volumena u ovisnosti o kutu nagiba i dubini iskopa izražena u m^3.

2500m), koja ima veliki broj iskopa za temelje manjih tlocrtnih površina (npr. 15m$\times$5m, dubine iskopa 3m, a ukupno 70 stupova), gdje je razlika u iskopu približno 4%, tj. 1260m^3 na 32130m^3 iskopa. Zaključak je da je formula za približni izračun volumena iskopa prikladna za pojedinačne građevine velikih tlocrtnih površina, a manje prikladna za građevine s više manjih pojedinačnih iskopa, u kojem slučaju je potrebno uzeti u obzir razliku između točnog i približnog izračuna volumena iskopa te koristiti formulu (26).

Literatura

[1] N. Elezović, B. Dakić, *Matematika 2: udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred tehničkih škola*, Element, Zagreb 2004. (3. izdanje)

[2] M. Katić Žlepalo, B. Uremović, *Application of Elevational Projection in Defining Scope of Construction Pit Excavation*, KoG : znanstveno-stručni časopis Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku, **15** (2011); 75–79

[3] E. Nonveiller, *Mehanika tla. Temeljenje građevina.*, Školska knjiga, Zagreb 1979.

[4] E. Nonveiller, *Kliženje i stabilizacije kosina*, Školska knjiga, Zagreb 1987.

[5] B. Uremović, M. Katić Žlepalo, B. Krajačić, *Determining the Construction Pit Shape and Size for the Water Reservoir Dragonožec - a student's final work*, International Scientific Conference People, Buildings and environment 2012 - Conference proceedings, Lednice: Brno University of Technology, Faculty of civil engineering, (2012) 816–823

[6] B. Uremović, M. Katić Žlepalo, I. Božić, *Defining the scope of construction pit excavation using the elevational projection*, 10th International Conference Organization, Technology and Management in Construction - Book of abstracts, Građevinski fakultet, Zagreb 2011.

Mirela Katić Žlepalo
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb
E-mail adresa: `mkatic@tvz.hr`

Boris Uremović
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb
E-mail adresa: `buremovic@tvz.hr`

Nina Pancirov
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb
E-mail adresa: `nina.pancirov@tvz.hr`