ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.1 (2018) 35-40

Dirac, ribarenje i kongruencije

Josip Brana, Anja Corn, Marko Rudec

Sažetak

Negativni brojevi, rad i djelo znanstvenika Diraca i teorija kongruencija zanimljivo su se isprepleli u jednostavnoj priči o ribarenju i podjeli riba za tri ribara.

Ključni pojmovi: Dirac, kongruencije, matematički problemi s cijelim brojevima

1 Uvod

Paul Adrian Maurice Dirac, (1902. – 1984.) jedan je od najvećih teorijskih fizičara uopće, među velikanima je uz bok Maxwellu[1] i Einsteinu[2].

S dvadeset četiri godine, neovisno od Heisenberga[3] i Schrödingera[4], uobličio je kvantnu mehaniku, temeljnu teoriju mikrosvijeta, koja opisuje i objašnjava svijet molekula, atoma, atomskih jezgri i elementarnih čestica, poput elektrona, fotona, kvarkova, itd.

Njegovi radovi o postojanju magnetskih monopola kao i zamisli o promjenjivosti temeljnih fizikalnih konstanata (e, c, h, ...) privlače pozornost još i danas. Iako je začetnik teorije renormalizacije (mase i naboja), nikada se nije pomirio s verzijom koja se koristi danas u teorijskoj fizici.

Osim njegovih doprinosa fizici, značajni su i njegovi matematički doprinosi: začetnik je teorije distribucija i poopćenih funkcija (njegova poznata Diracova delta funkcija), uveo je netenzorske (spinorske) reprezentacije Poincareove (Lorentzove) grupe.

[1] James Clerk Maxwell (1831. – 1879.), škotski fizičar koji se smatra osnivačem kinetičke teorije plinova pored Boltzmanna i Calusiusa.

[2] Albet Einstein (1879. – 1955.), njemački fizičar koji je najpoznatiji po teoriji relativnosti.

[3] Werner Heisenberg (1901. – 1976.), njemački fizičar dobitnik Nobelove nagrade za fiziku

[4] Erwin Schrdinger (1887. – 1961.), austrijski fizičar poznat po Schrödingerovoj jednadžbi gibanja elektrona. 1933. godine dobitnik je Nobelove nagrade za fiziku.

Diracova jednadžba brzih elektrona predviđa postojanje antimaterije (pozitrona), tj. čestice identične elektronu, ali suprotna naboja, koji se u susretu s elektronom poništava (anihilira) pri čemu nastaju dva fotona visokih energija. Navodno je priča koja slijedi nadahnula mladog Diraca da pri tumačenju svoje jednadžbe predvidi postojanje pozitrona!

2 Priča o ribarenju

Kažu kako je Dirac još kao student na St. John's koledžu u Cambridgeu sudjelovao na božićnom kvizu znanja (kvizu za studente koji su imali epitet brzi, tj. u kratkom su vremenu mogli riješiti svakakve zadatke) te je dobio sljedeći zadatak [2]:

Tri su ribara bila u ribarenju. Ulovili su određeni broj riba te su nakon toga otišli na spavanje. Prije spavanja nisu prebrojavali ribe, ostavili su taj posao i podjelu riba za ujutro. Prvi se ribar probudio dok su preostala dvojica još spavala te prebrojio ribe, bacio jednu ribu u more kako bi ukupan broj riba bio djeljiv s tri, uzeo svoju trećinu te otišao. Ne znajući za to, i drugi se ribar nakon toga probudi, prebroji ribe, baci jednu u more i trećinu uzme za sebe. I treći ribar također nakon određenog vremena učini isto. Pitanje je: Koliko je najmanje ulovljeno riba?

Navodno je Dirac (kao iz topa) odgovorio: *Minus dvije ribe.*

A razmišljao je ovako. Ukoliko u početku ribari imaju -2 ribe koje je prvi ribar zatekao, tada nakon što on baci jednu ribu u more ostaju -3 ribe, što je djeljivo s 3. Trećina riba pripada prvom ribaru, tj. $\frac{-3}{3} = -1$, stoga nakon što on uzme svoj dio ostaju $-3-(-1) = -2$ ribe. Analognim postupkom, zaključujemo kako i trećem ribaru ostaju -2 ribe.

3 Rješenje danog problema

Više je matematičkih ideja kako općenito riješiti ovaj zadatak, tj. kako naći opću formulu za mogući broj riba za gore ispričanu priču.
U ovom članku problem s ribarima riješit ćemo na dva načina, koristeći djeljivost i kongruencije. No, najprije matematički zapišimo rečenice zadane priče.

Neka je n početni broj riba. Slijedi:

1. Kada se prvi ribar probudio, ribari su imali n riba.
   Bacio je jednu, ostalo je $n - 1$ riba.

Uzeo je trećinu, ostalo je $\frac{2(n-1)}{3}$ riba.

2. Drugi je ribar bacio jednu, ostalo je $\frac{2n-5}{3}$ riba.

   Drugi je ribar uzeo trećinu od toga i ostalo je $\frac{4n-10}{9}$ riba.

3. Treći je ribar također bacio jednu i ostalo je $\frac{4n-19}{9}$ riba.

   Zatim je uzeo trećinu od toga što je $\frac{4n-19}{27}$ riba.

Svi brojevi iz gornje konstrukcije moraju biti cijeli brojevi. Pitanje je dakle koji je najmanji cijeli broj za koji je ta konstrukcija moguća, tj. za koji najmanji cijeli broj su svi gornji razlomci također cijeli brojevi? U nastavku ćemo do odgovora na ovo pitanje doći pomoću djeljivosti, a zatim i kongruencija.

3.1 Djeljivost

Izložimo prvo osnovna svojstva djeljivosti, a onda s tim svojstvima kratko riješimo i problem.

Neka je a cijeli broj, a b prirodan. Kažemo da b dijeli a ako postoji cijeli broj k takav da vrijedi $a = b \cdot k$. Broj a nazivamo višekratnikom broja b, a broj b djeliteljem broja a.

Za ovako definiranu djeljivost vrijede sljedeća pravila:

Pravilo 1. Ako su cijeli brojevi a i b djeljivi prirodnim brojem n, tada su sa n djeljivi i njihov zbroj $a+b$ i njihova razlika $a-b$. Ukoliko je a djeljiv, a b nije djeljiv s n, onda ni njihov zbroj ni razlika nisu djeljivi s n.

Pravilo 2. Neka je b djelitelj broja a i neka je b relativno prost s n. Ako je cijeli broj a djeljiv s prirodnim brojem n, tada je i $a : b$ djeljiv s prirodnim brojem n.

Pravilo 3. Ako je cijeli broj a djeljiv s prirodnim brojem n, a n djeljiv s prirodnim brojem d, tada je i a djeljiv s d.

Pokažimo sada pomoću navedenih pravila kako je dovoljno da trećina riba zadnjeg ribara bude cijeli broj pa će i ostali brojevi biti cijeli. Stoga, pretpostavimo da je $4n-19$ zaista djeljivo s 27.

- Ako 27 dijeli $4n-19$, onda 27 dijeli i broj $4n-19+27 = 4n+8$.

- Ako 27 dijeli $4n+8$, onda 27 dijeli i broj $\frac{4n+8}{2} = 2n+4$ jer $4n+8$ djeljivo s 2 i jer su 27 i 2 relativno prosti brojevi.
- Broj 27 možemo zapisati u obliku $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3$. Stoga, ako 27 dijeli $2n+4$, onda i njegov faktor 9 dijeli $2n+4$.
- Ako broj 9 dijeli $2n+4$, onda 9 dijeli i broj $2n+4-9 = 2n-5$.

Dakle, $2n-5$ djeljiv je s 9 pa je i broj riba koje je uzeo drugi ribar zaista cijeli broj.

Analognim računom (prepuštamo ga čitatelju) pokazujemo kako je onda i broj riba koji je uzeo prvi ribar cijeli broj. Lako je vidjeti kako su onda i preostale količine riba iz priče cijeli brojevi (kada je svaki od ribara uzeo određenu količinu riba, preostalo je dvostruko više riba od onih koje je dotični uzeo pa su i to cijeli brojevi, a ako od cijelog broja oduzmemo jedan dobijemo opet cijeli broj).
Dakle, preostalo je vidjeti koji su to cijeli brojevi n za koje je $4n-19$ djeljiv s 27.

Iz $4n-19 = 27t$ dobivamo

$$n = \frac{27t+19}{4} = \frac{28t+20}{4} - \frac{t+1}{4} = 7t+5-\frac{t+1}{4}. \tag{1}$$

Neka je sada $u = \frac{t+1}{4}$ iz čega slijedi da je

$$t = 4u - 1.$$

Uvrštavajući supstituciju $t = 4u-1$ u (1) dobivamo

$$n = 7(4u-1)+5-u = 27u-2.$$

Stoga, iz prethodnog izraza zaključujemo kako su brojevi za koje se može dogoditi cijela gornja priča oblika $27u-2$.

Premda je takav najmanji prirodni broj $27-2 = 25$ (prvi ribar uzima osam riba, drugi pet, treći tri), za $u = 0$ dobivamo broj $n = -2$ koji također, kako je Dirac i rekao, zadovoljava zahtjev mogućnosti izvedbe gornje konstrukcije.

3.2 Kongruencije

Također, riješimo navedeni Diracov problem jezikom kongruencije.
Ako cijeli brojevi a i b pri dijeljenju prirodnim brojem n daju isti ostatak onda kažemo kako su a i b kongruentni modulo n i pišemo

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Na primjer, 15 i 29 pri dijeljenju brojem 7 daju isti ostatak, broj 1. Dakle, $15 \equiv 29 \pmod 7$.
Ovako definirane kongruencije imaju mnoga lijepa (i netrivijalna) svojstva. Naime, kongruencije se mogu zbrajati, oduzimati, množiti, dijeliti, čak i potencirati. To jest vrijede sljedeća pravila [1]:

Pravilo 1. Ako je $a \equiv b \pmod n$, onda je i $a + kn \equiv b + ln \pmod n$ za bilo koje cijele brojeve k i l (*i lijevoj i desnoj strani kongruencije može se dodati ili oduzeti bilo koji višekratnik od* n).

Pravilo 2. Ako je $a \equiv b \pmod n$, onda je i $a : k \equiv b : k \pmod n$ za bilo koji cijeli broj k koji dijeli brojeve a i b i koji je relativno prost sa n (*lijevu i desnu stranu kongruencije možemo podijeliti istim brojem ako taj broj i* n *nemaju zajedničkih djelitelja*).

Pravilo 3. Ako je $a \equiv b \pmod n$, onda je i $a \equiv b \pmod d$, gdje je d bilo koji djelitelj od n.

Primjenom navedenih pravila, kao i kod korištenja djeljivosti, pokažimo da je dovoljno da trećina riba posljednjeg ribara bude cijeli broj pa će onda i ostali brojevi biti cijeli. U tu svrhu pretpostavimo da je $4n - 19$ zaista djeljivo s 27.

$$\begin{aligned}
4n - 19 &\equiv 0 \pmod{27} \quad / + 27 && \text{(Pravilo 1.)}\\
4n + 8 &\equiv 0 \pmod{27} \quad / : 2 && \text{(Pravilo 2.)}\\
2n + 4 &\equiv 0 \pmod{27} && \text{(Pravilo 3.)}\\
2n + 4 &\equiv 0 \pmod{9} \quad / - 9 && \text{(Pravilo 1.)}\\
2n - 5 &\equiv 0 \pmod{9},
\end{aligned}$$

tj. $2n - 5$ je djeljivo s 9 iz čega zaključujemo kako je broj riba koje je uzeo drugi ribar zaista cijeli broj. Analognim računom dobivamo da je broj riba koje je uzeo prvi ribar također cijeli broj.

Stoga se naš problem svodi na rješavanje linearne kongruencije

$$\begin{aligned}
4n - 19 &\equiv 0 \pmod{27}\\
4n &\equiv 19 \pmod{27} \quad / + 3 \cdot 27 && \text{(Pravilo 1.)}\\
4n &\equiv 100 \pmod{27} \quad / : 4 && \text{(Pravilo 2.)}\\
n &\equiv 25 \pmod{27} \quad / - 27 && \text{(Pravilo 1.)}\\
n &\equiv -2 \pmod{27}.
\end{aligned}$$

Dakle, broj koji zadovoljava gornju priču je oblika $n = 27k - 2$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$. Stoga, iako je 25 najmanji prirodni broj koji zadovoljava dani problem s ribarima, također vidimo da je i broj -2 jedno od rješenja problema, kao što je Dirac i tvrdio.

4 Zaključak

Dirac je u svom brzom odgovoru ipak bio u krivu, jer ako se usredotočimo na cijele, a ne na prirodne brojeve, tada najmanjeg cijelog broja za gornju konstrukciju nema. I -29 je također jedan takav broj: prvi ribar dobiva -10 riba, drugi -7, a treći -5 riba. No, možda je kasnije do ovog rezultata došao i Dirac pa ga je upravo to navelo, kada je tumačio svoju jednadžbu, da prazan prostor (vakuum) zamijeni s beskonačnim brojem elektrona negativnih energija, a nastanak para elektron-pozitron protumači kao pojavljivanje elektrona pozitivne energije i nedostatak jednog elektrona negativne energije.

Literatura

[1] Ilija Ilišević, *Kongruencije*, Osječki matematički list 1, No. **2**, (2001); 103–108

[2] Abdus Salam, *Ujedinjenje temeljnih sila prirode*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

Josip Brana
Odjel za fiziku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, Trg Ljudevita Gaja 6, Osijek
E-mail adresa: jbrana@etfos.hr

Anja Corn
Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, Kneza Trpimira 2B, Osijek
E-mail adresa: anja.corn@ferit.hr

Marko Rudec
Katoličko bogoslovni fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Vlaška 38, Zagreb
E-mail adresa: lovrisimus@gmail.com