



Pregledi i osvrti

Izvorni članak UDK 51

Dževad Zečić, Zenica

Međusobni utjecaji srednjovjekovne arapske i europske matematike

1. Kratak pregled srednjovjekovne arapske matematike

Vladajuća je predstava u povijesti znanosti da se zasluga znanstvenika islamsko-arapskog kulturnog kruga srednjovjekovnog perioda sastoji samo u tome da su sačuvali grčko predanje, pri čemu ga nisu samostalno i stvaralački proširili, te da su probudili interes Europe. Suvremena istraživanja skupila su dovoljno materijala za sasvim drukčiji pristup ovoj oblasti. To isto tako ne znači da su arapski srednjovjekovni znanstvenici isključivo djelovali stvaralački. Međutim, mi smo daleko od jedne cjelovite slike arapske znanosti, jer postoje značajne praznine stoga što su mnoga djela izgubljena, a mnogobrojna druga poznata djela nisu istražena.

Matematika na arapskom koja pripada srednjovjekovnom periodu može se kronološki podijeliti na tri stupnja s prijelazima koji isto tako karakteriziraju ostale discipline.

»Prvi se sastoji od perioda recepcije i asimilacije matematike prethodnika. Iza ovoga slijedi stvaralački period, koji počinje sredinom 9. stoljeća. Karakteristika ovog vremena jest činjenica da su znanstvenici bili u stanju poboljšati rezultate svojih prethodnika učitelja i njihovo učenje proširiti i korigirati. Treći je period karakterističan po tome što se matematičari nisu osjećali kao izravni učenici antičkih znanstvenika, iako su često koristili njihova djela. Kronološki se može uzeti da ovaj period počinje u drugoj polovini 12. stoljeća.«¹

Brzo probuđeni interes za teorijsku matematiku doveo je, od početka 9. stoljeća, do prijevoda grčkih originala, knjiga ili njihovih poboljšanja, s jedne strane, a s druge strane do proučavanja Arhimeda, Apolonijusa, Menelaja i drugih. S ovime je matematika na arapskom već u fazi recepcije i asimilacije dovedena na visoku teorijsku razinu.

Elementi indijske matematike, preuzeti u ranoj fazi neizravno od Perzijanaca, a zatim sredinom 8. stoljeća izravno od Indijaca, nalaze u islamsko-arapskim krugovima, pod utjecajem grčke, pretežno deduktivne metode – nove mogućnosti za dalji razvoj.

Arapski radovi u oblasti egzaktnih znanosti, koji su započeli s *Al-Fazarijevim* prijevodom *Siddhant-a*, dostigli su svoj prvi uspon u djelima *Muhameda ibn Muse al-Horezmija* (780.–850.) i može se reći da povijest arapske srednjovjekovne matematike počinje s njime. U njegovim rukopisima

1

Fuat Sezgin, *Geschichte Des Arabischen Schrifttums*, sv. V: *Matematik BIS* ca. 430 H., E. J. Brill, Leiden 1974., str. 26.

grčka i indijska matematička tradicija postaju jedinstvene. On je napisao dosta djela iz matematike i astronomije. Arapski su originali tih radova izgubljeni, ali neki imaju latinske prijevode iz 12. stoljeća. U svojoj aritmetici on uspostavlja indijski sustav pisanja brojeva i njegovo djelo – u prijevodu na latinski jezik pod naslovom *De numero Indorum* – poslužilo je kao izvor pomoću kojega je zapadna Europa upoznala decimalni pozicijski zapis brojeva. U jednom drugom rukopisu, autor je imenovan *Algorismus* i *Algorithmus*, odakle je u matematički jezik uveden termin *algoritam*, što predstavlja latinizirano ime autora.

Njegovo djelo iz algebre pod naslovom *Kitab muhtasar min hisab al-džabr va-l-mukabala* (Kratka knjiga o računanju al-džabr i al-mukabala) označava »znanost o jednadžbama«, čiji je originalni tekst izgubljen, ali je sačuvan na Zapadu u prijevodu na latinski jezik, a riječ *al-džabr* ostala je u upotrebi kao sinonim čitave algebre, koja je do 19. stoljeća bila znanost o jednadžbama. Za Al-Horezmija se može reći da je u svojim radovima upotrijebio algebru u našem modernom smislu. On je to učinio kada je objasnio kako je moguće reducirati neke probleme jedne od šest standardnih formi jednadžbi upotrebljavajući dva procesa, prvi znan kao *al-džabr* i drugi kao *al-mukabala*.

Al-Horezmi nije koristio simbole kao što mi danas činimo i svoju je matematiku izražavao riječima. Isto tako nije operirao s negativnim brojevima. Retoričko izražavanje u matematici i neupotreba negativnih brojeva bit će karakteristika čitavog budućeg perioda arapske matematike. Prema tome, arapska geometrija bila je strogo deduktivan sustav kakav je dao Euklid, a u algebri su Arapi preuzeli od Grka strogi geometrijski dokaz. Od Diofanta su prihvatili izbjegavanje negativnih brojeva. U predočavanju jednadžbi Arapi se vraćaju na retorički oblik, a napuštaju sinkopatski što ga je razvio Diofant. Izvršili su aritmetizaciju geometrije. U spoju grčke strogosti i indijske aritmetizacije uspjeli su dobiti izvanredne rezultate, osobito u algebri.

Time u islamskom svijetu, tradicije se indijske i grčke matematike susreću i započinje jedinstvo unutar strukture u kojoj su algebra, aritmetika i geometrija bile u posjedovanju kontemplativnog, spiritualnog i intelektualnog aspekta. Praktični i čisti racionalni aspekt bio je dio srednjovjekovne arapske matematike, nerazdvojiv i razvijen za kasniju zapadnu znanost, poznatu pod istim imenom.

Arapske srednjovjekovne znanstvenike posebno je interesirala trigonometrija, koja je dugo vremena promatrana u sklopu astronomije. Značajan dio trigonometrije sadržan je u radovima *Muhameda al-Battanija* (oko 850.–929.). On je raspolagao tablicama s vrijednostima kotangensa za svaki stupanj i kod rješavanja zadataka primjenjivao je kosinusni teorem za sferne trokute. Njegovi su radovi pokazali da arapski matematičari nisu bili samo prepisivači nego su unijeli i nove elemente u razvoj matematike.

Abu-l-Vafa al-Buzdžani (940.-998.) uveo je sinusni teorem u sfernu trigonometriju i načinio je tablicu vrijednosti za sinus, u intervalima 15', s točnošću do deset decimala. On je također nastavio, slijedeći Grke, izučavati jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja.

Mnogobrojne političke i etničke izmjene u islamskom svijetu izazvale su uspone i padove u razvoju astronomije i matematike. Jedni su centri iščekavali, drugi su doživljavali procvat, ali je u suštini karakter arapske znanosti ostao neizmjenjenim. Tako je, u tom smislu, u sjevernoj Perziji 11. stoljeća započela koncentracija znanosti. Tu je živio *Omar Hajjam*

(1048.–1131.), koji je načinio reformu perzijskog kalendara. On je napisao algebarski traktat u kojem je sadržano sustavno istraživanje jednadžbi drugog stupnja. U drugoj knjizi, u kojoj je razmatrao radove Euklida, Omar Hajjam zamijenio je euklidsku teoriju proporcija brojevnim teorijom i uopće je shvatio efikasnost brojeva.

Poslije toga, godine 1258., Mongoli su razrušili Bagdad i nedaleko je odatle niknuo novi centar u obliku *Maraginske opservatorije*, koja je bila uspostavljena mongolskim vladarom Hulaguom, pod upravom *Nasir ad-Dina at-Tusija* (1201.–1274.). At-Tusi je odvojio trigonometriju od astronomije kao samostalnu disciplinu. Pokušao je dokazati aksiome o paralelnosti kod Euklida, pri čemu je slijedio rad mislioca Omara Hajjama, pokazujući da je cijenio teorijsku metodu kod Grka. On je bio privržen tradiciji Hajjama i u svojoj teoriji brojeva računao je približne vrijednosti iracionalnih brojeva.

Maraginska je škola posvetila posebnu pozornost grčkoj geometriji, a posebno Euklidu. Veliki sirijski enciklopedist *Abu-l-Faradž* predavao je u Maragi Euklida i to 1268. Pod upravom At-Tusija i *Muhia ad-Dina al-Magribija* u ovom je gradu izašlo izdanje *Kitab al-mutawassitat*, knjige koja je bila velika kolekcija grčkih i arapskih klasika.

Drugi perzijski matematičar *Džamšid al-Kaši* (umro oko 1430.) riješio je jednadžbe trećeg stupnja pomoću iteracija i trigonometrijskih metoda. Znao je metodu rješavanja općih algebarskih jednadžbi višeg stupnja, koja sada nosi naziv šema Hornera, te je obogatio metodu izvlačenja korijena višeg reda iz običnih brojeva, što je vjerojatno bio utjecaj kineske matematike. U njegovim se radovima nalazi binomna formula za svaki pozitivan cijeli broj. On, usporedo sa šezdesetičnim razlomcima, koristi desetične sa zarezom. Broj π je Kašiu bio poznat s 16 desetičnih znamenki.

Srednjovjekovna arapska matematika u 12. stoljeću već je bila na kraju svog uspona i to stoljeće predstavlja kraj njezina zlatnog perioda. Tada je arapska znanost dostigla svoj vrhunac i do novovjekovlja trajala je faza stagnacije. Europa, već u 12. stoljeću, biva spremna za prihvaćanje te znanosti.

2. Prijenos znanosti u Europu – Stoljeće prijevoda

Europa, prije i u vrijeme *Gerberta* (940.–1003.), nije još bila spremna za razvoj matematike. Katolička crkva, preko svojih institucija i jezika, u skladu sa svojim mogućnostima nastavila je njegovati kulturne tradicije Rimske Imperije. Samostani i obrazovani pojedinci održavali su u stanovitoj mjeri grčko-rimsku civilizaciju. Autoritet matematičkih djela u Europi, skoro tisuću godina, bio je *Anicije Manilaj Severin Boetije* (480.–524.), a njegovo djelo *Osnove aritmetike* (*Institutio arithmetica*) dovršen je prijevod Nikomaha.

Gerbert, neovisno o Boetijevoj tradiciji, koja je dominirala u zapadnoj crkvenoj školi, napisao je matematičko djelo koje sadrži aritmetiku i geometriju. Bio je među prvim koji je učio upotrebu indijsko-arapskih cifara.

U 12. stoljeću latinska je Europa prebrodila jezičku barijeru prema arapskom jeziku i time započinje stoljeće prijevoda u Europi. U to vrijeme, bile su tri glavne spona između islamskog i kršćanskog svijeta – *Španjolska*, *Sicilija* i *Istočno Carstvo*. U početku se prevodilo isključivo s arapskog na latinski. Međutim, u 13. stoljeću postojalo je više načina: kao što je s arapskog na španjolski ili hebrejski, s grčkog na latinski, ili kombinacija arapski, hebrejski i latinski.

Euklidovi *Elementi* bili su među najranijim prijevodima s arapskog i ta verzija pripada *Adelardu iz Bata* (1075.–1160.). On je godine 1126. preveo, s

arapskog na latinski, *Al-Horezmijeve astronomske tablice*. Kasnije je preveo, s grčkog na latinski, *Ptolemejev Almagest*.

Prevoditeljski rad *Hermana Dalmatina* (rođen početkom 12. stoljeća) bio je potaknut radom *Adelarda iz Bata* i početkom ljeta 1135. on je krenuo na studijsko putovanje po Istoku. Tom je prilikom upoznao arapsku znanost. Već 1138. preveo je astrološku raspravu *Proročica*, koja je dio astronomskog djela *Sahl ibn Bišra* iz 9. stoljeća. Adelardov prijevod *Abu Mašarova* astrološkog djela potaknuo je Hermana Dalmatina da prevede njegovo glavno djelo *Kitab al-madkhal al-kabir 'ala 'ilm ahkam an-nudžum*, pod nazivom *Introductorium maius in astronomiam*.² Na sličan je način bio potaknut i preveo je Al-Horezmijeve tablice i Euklidove *Elemente*.

Grad Toledo bio je idealno mjesto za preuzimanje arapske znanosti. U njegovim bibliotekama bilo je obilje arapskih rukopisa, a mnogi su govorili arapski jezik, što je olakšavalo međujezički protok informacija. Kozmopolitizam prevoditelja u Španjolskoj jasan je po nekima od imena: *Robert iz Chestera*, *Herman Dalmatin*, *Plato iz Tivole*, *Gerard iz Kremone*, *Džon iz Sevilje* i drugi.

Među najveće sigurno spada *Gerard iz Kremone* (1114.–1187.), koji je na latinski preveo dijelove Euklidovih *Elementata*, koristeći arapsku verziju od *Tabita ibn-Kure*, a koja je bila bolja od Adelardove. S njegovim prijevodom *Almagesta* iz godine 1175., na Zapadu je postao poznat Ptolemej. Isto tako, Gerard je napisao jednu latinsku adaptaciju *Algebre od Al-Horezmija*, mada je bio više poznat jedan raniji prijevod *Algebre*, iz 1145., kojeg je načinio Robert iz Chestera. Ove se godine smatraju rađanjem europske algebre. Postojala je konfuzija oko imena Al-Horezmija u 12. stoljeću, te je od njegova iskrivljenog latiniziranog imena nastao pojam u matematici pod nazivom »algoritam«. Bilo je otpora u Europi prema prihvaćanju indijsko-arapske numeracije. Autori iz 13. stoljeća koji su popularizirali ovaj vid numeracije zvali su se »algoristi«, za razliku od onih koji su bili na tradiciji Boetija, a zvali su se »abakisti«. Abakusi su se koristili u 11. i 12. stoljeću, mada prije rasprava o upotrebi ove sprave njezina tradicija doseže do antičke Grčke, pa čak do Egipta i Babilona. Naziv sprave moguće da je izveden od grčke riječi abax, što znači ploča. »Abakisti« su isključivo koristili rimske brojeve u njihovim raspravama i nedostaci ovih brojeva nisu se osjećali zbog odsustva stvarnog računanja. Ti su brojevi bili jednostavni za bilježenje konačnog rezultata.³ Među »algoristima« posebno su se isticali: *Aleksandar iz Viledia* (1225.), *John iz Halifaksa* (znan kao *Sacrobosco*) i *Leonardo iz Pise* (1180.–1250., znan kao *Fibonacci*).

Carmen de Algorismo od *Aleksandra* poema je u kojoj su osnovne operacije s cijelim brojevima potpuno opisane i to s upotrebom indijsko-arapskih cifara, gdje se postupa s nulom kao brojem. *Algorismus vulgaris* od *Sacroboscoa* prikazuje računanje, a isto tako popularizira njegov osnovni traktat iz astronomije pod nazivom *Sphera*, koji je korišten u školama u kasnijem Srednjem vijeku. Knjiga *Liber abaci* (Knjiga o abaku), od *Fibonacci*, završena je 1202. i proslavljena je. Imala je neodgovarajući naslov. To nije djelo o abaku, nego je vrlo iscrpno razmatranje algebarskih metoda i problema u kojima se upotrebljavaju indijsko-arapski brojevi u strogom zasni-

² Ž. Dadić, *Herman Dalmatin*, Školska knjiga, Zagreb 1996., str. 90.

³ O tome vidi: G. Sarton, *Introduction to The History of Science*, The Williams and Wilkins Company, Baltimore 1931., str. 756.

vanju i, nažalost, retorička forma izražavanja. *Liber abaci* bila je otvorena u idejama koje su djelovale skoro moderno, ali čija je karakteristika bila razmišljanja islamskog i kršćanskog srednjovjekovlja, i tu su aritmetika i geometrija podržale jedna drugu. Ovo je gledanje, naravno, bilo oponašanje Al-Horezmijeve *Algebre Liber abaci*, usprkos tome, sadrži više brojeva nego geometrije. U tom je djelu opisano »devet indijskih znakova« zajedno sa znakom 0. Indijci su nulu nazivali »sunja«, što znači »prazno«, a u prijevodu na arapski je »asifr«, odakle je proizašla riječ cifra (ciffra, chiffre, cipher, Ziffer), što je u europskoj literaturi prvobitno označavalo nulu.⁴ Naravno, Fibonacciev račun s indijsko-arapskim brojevima bio je vrlo važan u procesu prenošenja arapskih znanosti. Bilo je velikog otpora prema uvođenju indijsko-arapskih cifara, jer je takva numeracija otežavala čitanje trgovačkih knjiga. Tek u 14. stoljeću italijanski trgovci su u svojim računskim knjigama počeli upotrebljavati neke arapske cifre. Međutim, to je u Europi u opću upotrebu ušlo tek u 16. stoljeću.

3. Prenošenje indijsko-arapskih cifara u Europu

Srednjovjekovni arapski znanstvenici koristili su dva osnovna vida numeracije. Prvi je preuzet od Indijaca pod nazivom *indijske cifre* (arkam al-Hind), odakle su proizašle naše »arapske cifre«. Drugi je vid bio slovna numeracija pod nazivom *džumal* ili *abdžad*. Krajem 8. stoljeća, *Muhammad al-Fazari* preveo je indijski traktat iz astronomije pod nazivom *Siddhant*, koji je na arapskom jeziku dobio naziv *Sindhind* i tada su shvaćene prednosti pozicijske numeracije s deset cifara, uključujući i nulu, nad grčkim koje je bilo rasprostranjeno u to vrijeme na Bliskom Istoku. Indijski sustav numeracije dobio je široku primjenu na Bliskom i Srednjem Istoku, zahvaljujući aritmetičkom traktatu *Muhameda al-Horezmija*.

Moderne numeracije s pozicijskim zapisom i nulom zajednički su znane kao arapske numeracije, koje se razlikuju od rimske numeracije. Imena arapski i rimski jednostavno pokazuju na porijeklo i izvor, ona potvrđuju činjenicu da je prva numeracija bila prihvaćena od Arapa, a slovna od Rimljana. Arapska numeracija, isto tako, razlikuje dva različita tipa cifara koje se karakteriziraju s dva imena, *hindu* i *gubar* cifre. *Hindu* cifre bile su zajedničke među istočnim Arapima i još su prisutne u današnjem arapskom svijetu. *Gubar* cifre nalazile su se u Španjolskoj među zapadnim Arapima. Riječ *gubar* znači *pijesak*. Ovaj termin sugerira da su ovi brojevi korišteni u svezi s nekom vrstom pješčanog abakusa.⁵ Njihove su forme varirale manje ili više, ali se može utvrditi da gubar numeracija liči našoj modernoj numeraciji mnogo više negoli hindu numeracija, te je ona skoro identična s formom abakus numeracije dane u Boetiusovoj geometriji. Ime hindu numeracije potpuno je jasno. To jednostavno pokazuje porijeklo i izvor, te potvrđuje dobro zasnovanu činjenicu da su je Arapi naučili od Hindusa. Mnogo je manje jasno značenje termina gubar i porijeklo gubar numeracije.⁶ Predložena je teza od strane Vopkeove teorije i podržana od

4

G. P. Matvievskaia, B. A. Rozenfeljd, *Matematiki i astronomi musulmanskogo srednevekovja i ih trudi* (VIII – XVII vv.), knjiga 2, Nauka, Moskva 1983., str. 16.

5

O tome vidi: G. Sarton, *Introduction to The History of Science*, The Williams and Wilkins Company, Baltimore 1931., str. 663.

6

S. Gandz, *The Origin of the Ghubar Numerals, or The Arabian Abacus and the Articuli*, Isis, XVI, 2, 49 (1931), str. 392-424.

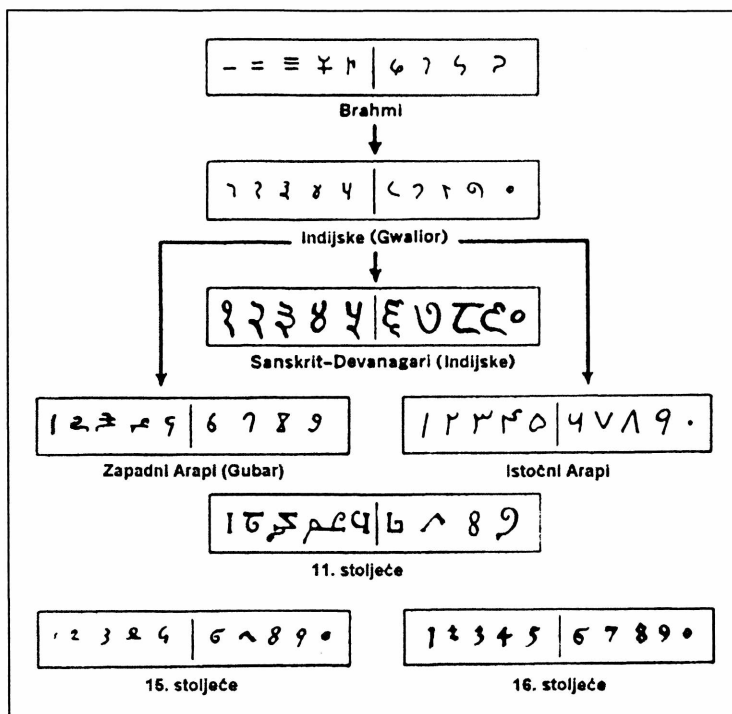
Ganca, da su gubar brojevi bili šireni s neopitagorejcima i da su ih Arapi učili izravno od Rimljana.⁷ Znaci prvog tipa još se i sada upotrebljavaju u arapskom svijetu, dok je naš suvremeni sustav, najvjerojatnije, proizašao iz sustava »gubar«, čiji su se znaci upotrebljavali u Španjolskoj prije nego što su tamo došli Arapi. Najvjerojatnije su ih neopitagorejci prenijeli iz Aleksandrije na zapad mnogo ranije (oko 450.).

Arapska slovna numeracija proizašla je iz drevnosemitskih tradicija, a bila je i analogna numeraciji koju su primjenjivali Grci. Kod Al-Birunija se nalazi objašnjenje:

»Označavanje brojeva s arapskim slovima stvar je dogovora i konvencije; za to su potrebna za upotrebu slova u običnom poretku alfabeta a, b, th, itd. Zbog postojanja devet jedinica, devet desetica, devet stotica, koji, sa znakom za tisuću, osigurani s dvadeset i osam slova. Ovo je bilo rašireno među ljudima od knjige prije arapskog vremena.«⁸

Dva su najstarija arapska rukopisa, a koja sadrže gubar cifre, iz 874. i 888. godine. Konačno, najstariji poznati europski datirani dokument, koji sadrži ove cifre, jest latinski rukopis iz 976.

»Taj Gerbert i njegovi učenici znali su gubar brojeve i ta činjenica ne ostavlja više prostora za nesuglasice...«⁹



Slika 1. Oblici deset cifara iz različitih perioda¹⁰

4. Renesansna europska matematika

U srednjem vijeku teorijska matematika nije potpuno nestala. Njome su se bavili filozofi. Skolastičari su, povezujući izučavanja Platona i Aristotela, dolazili do zaključaka o suštini kretanja, kontinuuma i beskonačnosti. Slijedeći Aristotela, *Origen* je negirao postojanje aktualne beskonačnosti. *Sveti Augustin* u *Božjem gradu* tretira niz svih cijelih brojeva kao aktualnu bes-

konačnost. Pisci skolastičari srednjeg vijeka, među kojima je i *Toma Akvinski*, prihvatili su aristotelovsko nepostojanje aktualne beskonačnosti i svaki su kontinuum promatrali kao potencijalno djeljiv do beskonačnosti.¹¹

Isto tako, rastao je interes za praktičnom matematikom i tijekom nekoliko stoljeća aritmetika i algebra bile su predavane izvan sveučilišta. Predavali su majstori računa koji nisu poznavali klasike. Dugo se vremena smatralo da dostignuća Grka i Arapa ne mogu biti prevladana nekim novim značajnim otkrićem.

Klasična matematika, koja je izvedena najviše iz elementarnih dijelova Euklidovih *Elementata*, bila je dosta ezoterična disciplina i pristupačna samo onima s visokim stupnjem pripremnih učenja. Iz tih razloga, otkrivanja grčkih rasprava iz ovog područja nisu učinjena u prvom ozbiljnom dodiru nastavka srednjovjekovne matematičke tradicije. Najpoznatija renesansna algebra, koja je bila među prvim, izašla je u Italiji. Kaluđer *Luka Pacioli* (1445.–1514.) napisao je matematičko djelo *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*,¹² koje je izravan nastavak *Liber abaci* iz 1202., bez spominjanja prethodnika i posrednika koji su djelovali poslije Leonarda Pizanskog. Put za djelo *Summa* bio je pripremljen generacijom arapskih algebrista, posebno s Al-Horezmijem, i izravno matematičkim djelom Leonarda Pizanskog. Ovo je djelo impresivna kompilacija materijala – s izvorima koji općenito nisu naglašeni – iz područja aritmetike, algebre, Euklidove geometrije i uvoda u knjigovodstvo. Napisano je na italijanskom jeziku. Od tada su indijsko-arapske cifre bile općeprihvaćene.

Renesansa u znanosti često je predstavljala bljesak otkrivanja grčkih radova, ali u matematici je to ipak bio nastavak srednjovjekovne tradicije.

Regiomontanus (1436.–1476.) je bio među najutjecajnijim matematičarima 15. stoljeća. Poslije putovanja i učenja u Italiji, Regiomontanus se vratio u Njemačku gdje je otvorio tiskaru i opservatorij u Nürnbergu. On je, u astronomiji, upotpunio novu latinsku verziju Ptolemejeva *Almagesta* koja je potjecala od srednjovjekovne verzije, a koja je izvedena od arapske. Regiomontanus je bio svjestan, kroz njegove kontakte s Averoistima na italijanskim sveučilištima, da je arapska astronomija vodila računa oko usklađivanja između Aristotelove prirodne filozofije i Ptolemejeva sustava. Isto je tako sa sigurnošću znao da su *Oresme* i *Cusa* izgradili ozbiljnu mogućnost o kretanju Zemlje. To ga je potaknulo na namjeru da reformira astronomiju i sigurno bi bio preteča *Kopernika* da ga u tome nije spriječila smrt. On nije dijelio humanističke apoteoze Helenizma i bio je spreman prepoznati važnost srednjovjekovne arapske i latinske algebre. Bio je blizak s radovima Al-Horezmija i Fibonaccia.

7

Isto.

8

Al-Biruni, *Astrology*, Luzac&Co., London 1934., str. 40–41.

9

S. Gandz, *The Origin of the Ghubar Numerals, or The Arabian Abacus and the Articuli*, Isis, XVI, 2, 49 (1931), str. 392–424.

10

C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., New York/Chichester/Brisbane/Singapore 1989., str. 237.

11

D. J. Strojck, *Kratak pregled istorije matematike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, str. 116.

12

C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc New York/Chichester/Brisbane/Singapore 1989., str. 278.

To mu je omogućilo da koristi algoritamske metode koje su razvili arapski algebraisti, a što je prenešeno u Europu u 12. stoljeću. Algebra Regiomontanusa, slično kao kod Arapa, bila je retorička. On je bio upoznat s radovima *Nasir ad-Dina at-Tusija* (1201.–1274.) i to je bio izvor njegove želje za zasnivanjem trigonometrije kao zasebne discipline, neovisne o astronomiji. Njegovo djelo *De triangulis omnimodis*, koje predstavlja sustavno rješavanje trokuta, ponovno je rađanje trigonometrije. U italijanskim gradovima, tijekom 15. stoljeća i kasnije, matematika je zauzimala istaknuto mjesto. Bolonjsko sveučilište bilo je, krajem 15. stoljeća, jedno od najvećih i najpoznatijih u Europi. Studenti tog sveučilišta u raznim su periodima bili *Pacioli*, *Albrecht Dürer*, *Kopernik* i dr. Tu novu epohu karakterizira težnja da se usvoji znanost klasikâ i da se stvara nova, koja će prijeći granice što su ih povukli klasici. Time je Europa učila matematiku grčku, arapsku i latinsku, koja je tekla kroz sveučilišta, crkvene prepisivače, rastuće trgovačke aktivnosti i kroz učenja drugih disciplina.

Temelji mnogih znanstvenih razmatranja u 15. stoljeću i kasnije bila su gledišta što su ih izgradili *Abu Mašar* i *Herman Dalmatin*, a to je astrološka dopuna Aristotelove prirodne filozofije. Upravo takvo učenje Abu Mašara, a koje je zastupao Herman Dalmatin, bilo je prihvaćeno u kasnijem srednjem vijeku. Interes za učenjem arapskog znanstvenika *Abu Ali Hasana ibn al-Haitama* (965.–1040.), poznatog na Zapadu kao *Alhazen*, trajao je sve do Petrićeva vremena. Alhazen je najveći dio svog života proveo u Španjolskoj i bavio se optikom, matematikom, fizikom, medicinom i drugim granama znanosti. Eksperimentirao je i proučavao širenje svjetlosti i boja, optičke iluzije i refleksiju svjetlosti. Otkrio je zakone refrakcije svjetlosti promatrajući svjetlosne zrake kroz providne medije. Dao je prvi opis različitih dijelova oka i znanstveno objašnjenje procesa viđenja. On je opovrgnuo Ptolemejevu i Euklidovu teoriju viđenja da oko šalje zrake na objekt viđenja, te po njegovoj teoriji zrake potječu iz objekta viđenja, a ne iz oka. On je također pokušao objasniti biokularno viđenje, te je dao korektno objašnjenje jasnog povećanja veličine Sunca i Mjeseca kada su blizu horizonta. Poznat je po najranijoj upotrebi *camera obscura*. Kroz ova široka istraživanja optike, Alhazen se smatra tvorcem moderne optike. Njegova knjiga *Kitab al-Manazir*, inspirirana radom Ptolemeja o refleksiji i refrakciji, prevedena je na latinski početkom 13. stoljeća i na Zapadu je bila poznata pod nazivom *Perspectiva* ili *De aspectibus*. *Witelo* je bio poznati znanstvenik iz tog vremena i smatrao se najboljim tumačem Alhazena. Prema *Witelovoj Perspectivi* iz 1572., *Fridrich Risner* objavio je isto djelo pod nazivom *Optical thesaurus Alhazeni Arabis*. Alhazenovi radovi utjecali su na *Leonarda da Vincija*, *Franu Petrića*,¹³ *Johannesa Keplera* i druge. Značajni su Alhazenovi radovi iz matematike, a posebno pokušaj dokaza petog Euklidova postulata, što na stanoviti način predstavlja izvor neeuklidskih geometrija.

U 16. stoljeću u Europi dolazi do pojave novih ideja u matematici, a koje su uglavnom vezane za *Francoisa Vietea* (1540.–1603). Njegov je najveći uspjeh usavršavanje teorija jednadžbi, što je prisutno u djelu *Uvod u analitičku vještinu* (1591.). Bio je među prvima koji je brojeve predstavljao slovima i njegova »*logistica speciosa*« označuje pojavu opće simbolike. Druga značajna tekovina u usavršavanju numeričke tehnike bilo je otkriće *logaritama*. To pripada škotskom lordu *John Neperu*, koji je godine 1614. tiskao *Opis divnog kanona logaritma*. Godine 1624. *Henry Briggs* je objavio *Logaritamsku aritmetiku*. U redove velikih matematičara ovog perioda pripada i *Marin Getaldić*, rođen 1568. u Dubrovniku, gdje je i umro 1626. Njegov najzna-

čajniji rad, *O matematičkom rješenju i konstrukcijama*, daje ideje o primjeni algebre u geometriji i time se može smatrati pretečom *Pierre de Fermata* i *Rene Descartesa*. Time matematika u 16. i 17. stoljeću, s novim idejama i načinom izražavanja, dobija jaki poticaj za daljnjim razvojem, kreće drugim tijekom i postiže velike rezultate.

5. Ulazak Bosne u sferu islamsko-orijentalne civilizacije

Pad Bosne i Hercegovine pod tursku vlast doveo je do prekretnice u političkom, ekonomskom i kulturnom životu. Naime, s osmanskom vladavinom Bošnjaci su ušli u sferu islamsko-orijentalne civilizacije koja se odražavala u svim aspektima života. S time je i pisana riječ bivala dominantnija i rukopisna knjiga u to vrijeme doživljava procvat. U prvoj etapi osmanske vlasti rukopisna se knjiga uvozila iz značajnijih orijentalnih centara tog vremena, pa se na taj način privatne biblioteke obogaćuju djelima koja su bila iz oblasti religije, filozofije, književnosti, mistike, lingvistike, astronomije, matematike, geografije, medicine i drugih znanosti.

U vremenu od 15. stoljeća do sredine druge polovine 19. stoljeća formirane su brojne biblioteke, privatne i javne, a koje su sadržavale orijentalne rukopise iz različitih oblasti znanosti. Najznačajnija bosansko-hercegovačka biblioteka u vrijeme turske vladavine, koja nije gubila primat niti u austro-ugarskom periodu, jest *Gazi Husrev-begova biblioteka* u Sarajevu, koju je osnovao *Gazi Husrev-beg* zakladnicom za medresu 1537. godine. Biblioteka je posjedovala i još uvijek posjeduje dosta turskih, arapskih i perzijskih rukopisa iz oblasti svih znanosti, a samim tim i iz oblasti egzaktnih znanosti. Isto tako biblioteka čuva i djela bosansko-hercegovačkih autora koji su stvarali na orijentalnim jezicima.

Ova biblioteka čuva stanoviti broj matematičkih rukopisa čiji su autori iz različitih islamskih zemalja. Čak je većina rukopisa prepisana izvan prostora Bosne.

5.1. Lista orijentalnih rukopisa iz matematike koji se čuvaju u *Gazi Husrev-begovoj biblioteci u Sarajevu*¹⁴

U popisu su navedeni slijedeći podaci: ime autora koji je napisao djelo s osnovnim biografskim podacim, prijepisi njegovih djela sa signaturama koji se čuvaju u *Gazi Husrev-begovoj biblioteci*, te godina i ime prepisivača, ako su poznati.

1. *Šihab ad-Din Abu-l-'Abbas Ahmad ibn Muhammad ibn 'Imad ibn al-Haim al-Faradi* (1355–1412) – rodio se u Kairu, predavao matematiku u medresi Salahija u Jeruzalemu, umro u Jeruzalemu.

Prijepisi njegovih matematičkih djela iz 1550. godine na arapskom jeziku, a koji su sačuvani u *Gazi Husrev-begovoj biblioteci u Sarajevu* su:

13

Petriću su bile poznate Witelove ideje o teoriji svjetlosti i njima se služio kao izvorom i u slučaju kada je neke ideje i odbacivao. O tome vidi: F. Petrić, *Nova sveopća filozofija*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb 1979., str. 123.

14

Popis je napravljen na osnovi osnovnog uvida, a podaci o nekim autorima preuzeti su iz

dostupne literature. O ovome vidi: *Islamski kalendar i astronomija*, priredio Enes Kujundžić, El-Kalem 1991., str. 29–36 i 88–91.; G. P. Matvievskaia, B. A. Rozenfeljd, *Matematika i astronomi musulmanskogo srednevekovja i ih trudi* (VIII–XVII vv.), knjiga 2, Nauka, Moskva 1983., str. 579–584, 643, 422–423, 569, 487, 472–474.

- i) *Nuzha an-nuzzar fi-l-hisab* /Zadovoljstvo promatranja u aritmetici pojma gubar (cifra)/, R-2440/1.
- ii) *Al-Wasila fi 'ilm al-hisab* /Pomoć u aritmetici/, R-2440/3.
- iii) *Al-Mugni' fi-l-džabr wal-muqabala* /Dovoljno o al-džabr wal-muqabala/, R-2440/4.
- iv) *Al-Musri' muhtasar al-Mumti' fi šarh* /Brzo skraćena zanimljivost u komentaru o al-džabr wal-muqabala/, R-2440/5.
- v) *Risala fi 'ilm al-hisab* /Traktat o znanosti aritmetike/, R-2440/7.

2. *Šams ad-Din Muhammad ibn Ašraf al-Husaini as-Samarkandi al-Maragi* (druga polovina XIII. stoljeća), iz Samarkanda i autor mnogih djela iz područja filozofije, teologije, logike, prava, matematike i astronomije. Radio je u maraginskoj opservatoriji At-Tusija. Njegovo je najpoznatije djelo *Aškal at-ta'sis* /Ponuda dokaza/, koje sadrži matematiku, prirodne znanosti i filozofiju.

U Gazi Husrev-begovoj biblioteci jest njegovo djelo:

- i) *Aškal at-ta'sis* /Ponuda dokaza/, prijepis je iz 1721. godine, R-623/1.
3. *Šams ad-Din Muhammad ibn Mubarakšah Mirak al-Buhari al-Haravi* (umro oko 1340. godine), vjerovatno rodom iz Buhare. Napisao je komentar na djelo *Aškal at-ta'sis* /Ponuda dokaza/ od Šams ad-Dina as-Samarkandija.

U Gazi Husrev-begovoj biblioteci jest njegovo djelo:

- i) *Šarh Aškal at-ta'sis* /Komentar o Ponuda dokaza/, prijepis je iz 1476. godine, R-2526.
4. *Salah ad-Din Musa ibn Muhammad ibn Mahmud Kazi-zade ar-Rumi* (1360.–1437.), rodom iz Burse, sin suca (kazi-zade), radio u Samarkandu.

U Gazi Husrev-begovoj biblioteci je prijepis njegova djela:

- i) *Šarh Aškal at-ta'sis* /Komentar o Ponuda dokaza/, R-1889.
5. *Šaraf ad-Din Jahia al-'Amriti al-Azhari al-Ansari* (druga polovina XVI. stoljeća), pjesnik i matematičar. Napisao matematičko djelo u stihovima pod nazivom *Al-Manzuma fi-l-hisab* /Poema o matematici/.

U Gazi Husrev-begov biblioteci je prijepis njegova djela:

- i) *Al-Manzuma fi-l-hisab* /Poema o matematici/, R-1749.
6. *Hasan ibn Abu Talib zvani Abu Mahasin al-Baihaki al-Horasani*, autor nije registriran ni u istočnim niti u zapadnim izvorima. Napisao je matematičko djelo *Muhtasar fi'ilm al-hisab*.

U Gazi Husrev-begovoj biblioteci se nalazi prijepis njegova djela:

- i) *Muhtasar fi 'ilm al-hisab* /Osnove matematike/, prepisao Imad ibn Muhammad al-Džili 1340. godine. Za sada je jedini registrirani primjerak u svijetu.
7. *Baha ad-Din Muhammad ibn Husain al-'Amili* (1547–1622), rođen u Balbeku, učio u Iranu, bio je šeih-al-islam pri dvoru šaha Abaza I. u Isfahanu. Poznati je matematičar, astronom i filozof. Napisao je matematičko djelo *Hulasa al-hisab* /Bit matematike/ koje je postiglo veliku popularnost u vremenu od XVII. do XIX. stoljeća. Tomu svjedoče mnogobrojni prijepisi čuvani u različitim svjetskim bibliotekama.

U gazi Husrev-begovoj biblioteci se, isto tako, nalazi nekoliko prijepisa njegova djela:

- i) *Hulasa al-hisab* /Bit matematike/, prepisivač je nepoznat i prijepis je iz 1678. godine. R-467.
- ii) *Hulasa al-hisab* /Bit matematike/, prepisivač i godina prijepisa su nepoznati. R-2551.
- iii) *Hulasa al-hisab* /Bit matematike/, prepisao hadži Osman ibn hadži Omer 1664. godine. R-1418.
- iv) *Hulasa al-hisab* /Bit matematike/, prijepis je iz 1723. godine i prepisivač je nepoznat. R-1660/4.
- v) *Hulasa al-hisab* /Bit matematike/, tiskano u Istanbulu 1851. godine. O-3494.

8. 'Umar b. Ahmad al-Ma'i al-Čilli (XVII.-XVIII. stoljeće), filozof, matematičar i astronom. Napisao je komentar na djelo al-Amilija.

U Gazi Husrev-begovoj biblioteci sačuvan je prijepis njegova djela:

i) *Šarh ar-risala al-baha'yya fi'l-hisab* /Komentar na djelo *Bit matematike*/, R-551.

9. 'Abd ar-Rahim ibn Abi Bakr al-Mar'aši (umro 1636. godine), turski matematičar. Napisao je komentar na djelo *Bit matematike*.

U Gazi Husrev-begovoj biblioteci sačuvan je prijepis njegova djela:

i) *Šarh al baha'yya fi'l-hisab* /Komentar na djelo *Bit matematike*/, R-1463.

10. *Ramadan b. Ali Husayn al-Gazuri*. Napisao je komentar na djelo *Bit matematike*.

U Gazi Husrev-begovoj biblioteci sačuvan je prijepis njegova djela:

i) *Risala fi'l-hisab* /Komentar o matematici/. R-1478/1.

11. *Risala fi' bayan 'arqam al-hindi* /Komentar o indijskim ciframa/, autor i godina nastanka nepoznati. R-1466/1.

12. *Karadoz Abdulah*, napisao matematičko djelo o osnovnim principima matematike i računovodstva. U Gazi Husrev-begovoj biblioteci njegov je rukopis:

Risala fi'l al-hisab /Komentar o matematici/. R-3493.

Na osnovi pronađenih rukopisa može se ustanoviti da je bilo Bošnjaka koji su se bavili matematikom i iza sebe ostavili matematička djela. Oni su uglavnom napisali matematička djela izvan Bosne. Najpoznatiji su:

1) *Nasuh ibn 'Ali as-Salaki al-Matrakči* (umro 1583. godine), rođen u Bosni, matematičar, radio je u Istanbulu. Napisao je slijedeća matematička djela:

- i) *Džamal al-hussab fi kamal al-hisab* /Ljepota računanja i savršenstvo aritmetike/.
 - ii) *'Umda al-hisab fi farud al-makdira bi-l-kullijjat* /Oslonac aritmetike u pretpostavci svih veličina/.
 - iii) *Kan' -anija fi'ilm al-hisab* /Posvećeno Kan'anu (knjiga) o aritmetici/.
- 2) *Muhammad ibn Musa al-Bosnavi* (umro 1636. godine), iz Bosne, matematičar.

Napisao je matematičko djelo pod nazivom:

- i) *Risala fi džizr al-asamm* /Komentar o gluhom (iracionalnom) korijenu/.
- 3) *Darwiš Husam Bošnaq*, iz Bosne, iza sebe je ostavio matematičku raspravu na turskom jeziku pod nazivom:
 - i) *Lum'at al-fawa'id* /Odsjaj koristi/.
- 4) *Ahmed Hatem Bjelopoljač* (umro 1754.), čije je puno ime *Hatam šaih Ahmad Qadi-zade Aqowali*, iz Bosne, iza sebe je ostavio matematičko djelo:
 - i) *Šarh 'Al-Lum'a fi'l hisab'* /Komentar 'Odsjaj znanosti matematike'/.¹⁵

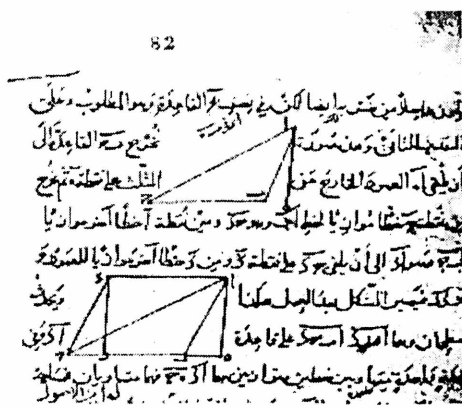
To je komentar na djelo *al-Lum'a* od *Ahmada ibn Ha'ima* (umro 1412.).

5.2. Matematički rukopis R-998 koji se čuva u Gazi Husrev-begovoj biblioteci u Sarajevu

Zbirka pod registarskim brojem R-998 (na koricama je oznaka T-998, što predstavlja trezorski primjerak) sastoji se od dva rukopisa. Prvi je rukopis matematičko djelo pod nazivom *Muhtasar fi 'ilm al hisab*, a drugi je djelo iz oblasti astronomije pod nazivom *Kitab fi 'ilm an-nudžum*. Oba je djela napisao *Hasan ibn Abu Talib* zvani *Abu Mahasin al-Baihaki al-Horasan*i.

Zbirka ima 270 listova koji su dimenzija $23 \times 16/17 \times 11$. Pismo je *nash tadwini* i svaki list ima 17 redova. Papir je arapskog (istočnog) porijekla izrađen od pamuka i konoplje, deblji, žućkastotamne boje. Tinta je crne boje, izuzetno dobre kvalitete, neporozna na dodir s vodom. Naslovi poglavlja i značajnije riječi pisani su krupnijim slovima. Brojevi, točke i ukrasni elementi pisani su crvenom tintom. Po marginama ima nešto komentara pisanih rukom istog prepisivača. Listovi su s kustodama.

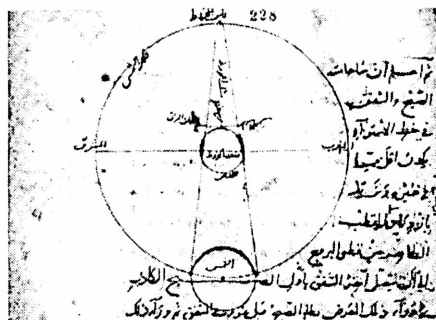
Rukopis djela iz matematike (sl. 2. a. predstavlja dokaz stava o računanju površine paralelograma, gdje se autor poziva na neke stavove iz Euklidovih *Elementata*) pod nazivom *Muhtasar fi 'ilm al hisab* ima 137 listova. Naslov djela nije eksplicitno naveden, dok se ime autora nalazi na prvom listu. Djelo ima početak: »Ovo je skraćeni prikaz slabog i grješnog Allahova roba Hasana ibn Abu Taliba zvanog Abu Mahasin al-Baihaki al-Horasan...« Djelo se završava kolofonom u kome stoji bilješka prepisivača: »Završeno pisanje četvrtak 10. džumad el-ula godine 741., Imad ibn Muhamed el-Džili. Neka Allah oprostí njemu i njegovim roditeljima.« /Vidjeti list 136/ Prema tome djelo je prepisano 2. XI 1340. U dostupnim izvorima, kako zapadnim tako i istočnim, nije evidentiran ni autor niti naziv djela.¹⁶



Sl. 2.a.

»Odsutni su podaci po kojim bi se sudilo o matematici 13-14. stoljeća Srednje Azije. Malo je poznatih radova iz tog perioda. Više o njima znamo po imenima i raspoložemo krajnje oskudno o njihovim radovima.«¹⁷

Rukopis djela iz oblasti astronomije (Sl. 2.b. predstavlja skicu koja se nalazi u ovom astronomskom rukopisu), pod nazivom *Kitab fi 'ilm an-nudžum*, napisao je spomenuti autor. Nedostaje početak djela. Ima 138 listova. Pisano je rukom istog prepisivača. Pojedine su riječi nadvlačene crvenom linijom. Na više mjesta, crtežima rađenim crvenom tintom, prikazan je položaj nebeskih tijela. Po marginama ima komentara i nešto interlinearnih bilješki pisanih rukom istog prepisivača. Listovi su s kustodama. Djelo se završava kolofonom u kojem stoji bilješka:



Sl. 2.b.

»Sakupljač je ovoga djela ponizni skrušeni rob svemogućeg Boga Hasan ibn Abu Talib, zvani Abu Mahasin al-Baihaki al-Horasani. Bog popravio njegovo stanje i sačuvao ga od zla i dao da završeci njegovih poslova na ovom i budućem svijetu budu dobri. Uslišaj Gospodaru svijetova pravo Muhameda i sve njegove porodice odabrane i čiste.«

Datum prijepisa i prepisivač nisu navedeni. Papir i rukopis su isti kao kod prijepisa matematičkog djela. Može se zaključiti da je isti prepisivač i da je djelo prepisano u istom periodu kad i matematičko djelo. Na kraju se zbirke nalaze četiri zaštitna lista novijeg datuma, umetnuta naknadno prilikom posljednjeg korićenja. Povez je polukožni, novijeg datuma.

Do sada su bila poznata samo ova dva rukopisa, dok autor nije registriran u nama dostupnoj literaturi. Posljednja pretraživanja preko Interneta¹⁸

¹⁵

Biografije pojedinih autora se nalaze u: G. P. Matvievskaia, B. A. Rozenfeljd, *Matematiki i astronomi muslimanskoga srednevekovja i ih trudi* (VIII – XVII vv.), knjiga 2, Nauka, Moskva 1983., str. 422, 472, 487, 562, 569, 595 i 643.

O tome vidi: S. Balić, *Kultura Bošnjaka*, Zagreb 21994., str. 84-85; A. Ljubović i S. Grozdanić, *Prozna književnost Bosne i Hercegovine na orijentalnim jezicima*, Orijentalni institut u Sarajevu, Sarajevo 1995., str. 103-104.

¹⁶

O ovom je konzultirana sva relevantna literatura, a o tome bilježe i katalogisti Gazi Husrev-begove biblioteke koji su na prednjoj strani napisali konstataciju o jedinstvenosti ovog rukopisa. Časopis *Radovi matematički*, u izdanju Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, na naslovnim stranama vol. 1 no. 1, vol. 3 no. 1, vol. 6 no. 1 i vo. 7 no. 1 (od 1985.-1991.) prezentirao je str. 18, 82, 90, 98 ovog rukopisa. Uredništvo časopisa dalo je osnovne podatke o rukopisu. Fuat Sezgin, direktor Instituta za povijest arapsko-islamskih znanosti u Frankfurtu, obavijestio me je da u bio-bibliografskim izvo-

rima nije našao ime ovog autora. Daljnja elaboracija o tome i činjenice do kojih se došlo, slijede u narednom dijelu ovoga rada.

¹⁷

G. P. Matvievskaia – H. Tlašev, *Matematičeskie i astronomičeskie rukopisi učenijih Srednei Azii X-XVIII vv.*, Fan, Taškent 1981., str. 3.

¹⁸

Preko Interneta sam ostvario najuspješniju komunikaciju sa znanstvenicima iz Irana. Posebno s Muhammadom Bagheriem, koji je direktor History of Science Department in Encycloaedia Islamica Foundation u Teheranu i profesor povijesti matematike na Šarif Tehnološkom Univerzitetu u Teheranu. Njegovi suradnici pronašli su astronomski rukopis u Mešhedu i dostavili mi kopiju djela iz kataloga gdje je navedeno. Isto su tako provjerili i druge kataloge različitih biblioteka i konzultirali Ahmada Manzavija, poznatog katalogista rukopisa u Iranu. Bagheri je isto tako provjerio *Loghatnamaie Dehkoda* (Dehkoda rječnik) i *Zari'a ıla tasanif al-shi'a* od Agha Bozorog Teherania. Podatke o Hasanu Abu Talibu nisu pronašli.

omogućila su da se ustanovi kako postoji još jedan prijepis astronomskog djela, a koji se čuva u biblioteci *Astani Kodse Razi* u Mešhedu u Iranu i vodi se pod registarskim brojem MS12138, pod nazivom *Tuhfei Rašidija*. U katalogu biblioteke, sv. 10, str. 26–27, kratak je opis rukopisa.

U oba rukopisa nedostaje početak, i to kod onog koji se čuva u Mešhedu samo početni dio, a kod onog koji se čuva u Sarajevu nedostaje skoro čitavo prvo poglavlje uvodnog dijela. Naime, od prvog je poglavlja sačuvana samo posljednja strana. Upoređivanjem završetaka oba rukopisa došlo se do zaključka da je u pitanju isto astronomsko djelo. Međutim, može se primijetiti da je prijepis iz Mešheda prepisan 1663., dakle 323 godine poslije prijepisa koji se nalazi u Sarajevu. Prema tome, može se zaključiti da su se djela Hasana ibn Abu Taliba prepisivala u dosta velikom vremenskom intervalu. Rijetkost tih prijepisa vjerojatno je prouzročena njihovim uništavanjem. S druge strane, to je dovelo do toga da se ta djela nisu analizirala, pa je vjerovatno odatle činjenica da se autor ne navodi niti u jednom relevantnom izvoru.¹⁹

Sigurno se može tvrditi da je Hasan ibn Abu Talib živio u Baihakiu (Horasan) i da je bio šiitski musliman, kao i većina iz te oblasti. U matematičkom djelu spominje velikog matematičara Abu-r-Raihana al-Birunija (973.–1048). Prema tome, nije mogao živjeti prije 9. stoljeća. Prijepis matematičkog djela koje se čuva u Sarajevu iz godine je 1340. Prema tome, on je mogao živjeti u vremenu od 9. pa do prve polovine 14. stoljeća.

Poslije uobičajene invokacije, autor navodi da je ovo kratak prikaz kojeg je uradio iz računa i sadrži glavne principe hava'ia (zračne) i rad s tahtom i turabom. To su, ustvari, principi računanja napamet i pisanjem po površini, odnosno po pijesku. U ovaj dio spada i »ono što sam se okoristio od pametnih«. Autor navodi da je ovo djelo napisao u znak sjećanja na njegova vođu Habibullaha Alia ibn Abu Taliba i navodi:

»On mi je još od prije naredio da za njega napišem osnove iz računanja i principe geometrije.«²⁰

Djelo se sastoji od uvoda, tri glave i završnog dijela, u kojem su rijetkosti, a koje su vezane s ovom problematikom. Prva je glava iz područja aritmetike, a prvi se dio odnosi na aritmetičke operacije s cijelim i iracionalnim pozitivnim brojevima, dok je drugi dio o razlomcima. Druga je glava iz područja geometrije, te ima uvod i četiri dijela. Sadrži planimetrijsku i stereometrijsku problematiku. Autor dokazuje pravila računanja površina ravnih figura pozivajući se na stavove iz Euklidovih *Elementa*. Treća je glava iz područja algebre i obuhvaća proporcije, rješavanje linearnih i kvadratnih jednažbi. U sklopu su ove glave neobični zadaci, a koji su vezani za prethodno iznesene oblasti.

Suštinski, djelo se sastoji iz tri matematičke oblasti: aritmetike, geometrije i algebre. Autor ne navodi u eksplicitnom obliku naziv djela, ali navodi da su ovo samo glavni principi matematike i u tradiciji islamske medievalne matematike uobičajeno je bilo da se pišu djela oblika repertorija. Njihovi su nazivi bili ili *Hulasa al hisab* ili *Muhtasar fi 'ilm al hisab*. To je rukovodilo popisivača u Gazi Husrev-begovoj biblioteci u Sarajevu da mu dade ovaj naziv, mada ono sustavnošću, povezanošću, obujmom i dokazima nadilazi oblik takvih djela.

Može se izvući opći zaključak da je autor ovog djela vjerovatno živio u XII. ili XIII. stoljeću. Napisao je dosta opširno djelo koje je sveobuhvatno i koje u pojedinim svojim dijelovima posjeduje dokaze. U teorijskoj matematici djelo je potpuno oslonjeno na Euklidove *Elemente*, što implicira općeniti karakter srednjovjekovne arapske matematike.

S druge strane, autor je od svojih suvremenika najbliži aritmetičkim djelima At-Tusija. Osim njega, on preuzima neke stavove od starijih matematičara kao što je bio Al-Biruni, čiji ime autor navodi. Matematička djela ovog tipa uglavnom su bila kompilacijska djela, jer se željelo biti što praktičniji i koncizniji u ovladavanju matematičke problematike. Međutim, uzimajući prethodno u obzir, može se zaključiti da ovo djelo nadilazi taj tip. Ono vjerovatno za svoje vrijeme predstavlja mali pomak u tom smislu i pokazuje da pripada stvaralačkom periodu srednjovjekovne arapske matematike. Isto tako, kroz izložene dokaze, može se zaključiti da autor posjeduje kreativnu slobodu naspram Euklidovih *Elementa* i time pokazuje zrelost faze matematike u kojoj se ona nalazila.

Danas ovo djelo daje cjeloviti uvid u povijest srednjovjekovne arapske matematike, a s obzirom na rijetkost sačuvanih rukopisa iz ovog perioda ono postaje još vrijednije. S obzirom da se rukopis nalazi u Gazi Husrev-begovoj biblioteci u Sarajevu, te da je korišten na ovome tlu, sigurno je imao utjecaj na matematičku naobrazbu u Bosni i Hercegovini za vrijeme Osmanske vladavine. Samim time ovaj rukopis spada u dio kulturne baštine Bosne i Hercegovine.

6. Utjecaj europske matematike na arapsku matematiku

Na osnovi popisa matematičkih rukopisa koji se čuvaju u Gazi Husrev-begovoj biblioteci u Sarajevu, može se općenito zaključiti da djela pripadaju klasičnom arapskom periodu. Prema tome, ta su djela služila za proučavanje arapske matematike klasičnog perioda. Komentari novijih datuma i djela Bošnjaka napisanih u osmanskoj Turskoj, uglavnom su komentari na arapske prethodnike ili priručnici proizašli iz takvih djela. Znači, da su osmanski Turci pokušali očuvati razinu arapskih znanosti što im, na primjer u matematici, nije uspjelo. Čak niti pad razine matematike nisu uspjeli zaustaviti. Međutim, uspjeli su sačuvati mnogobrojna djela iz arapskih znanosti.

Postavlja se pitanje da li su, nakon dolaska Turaka u Bosnu, postojali kontakti između islamske i zapadnoeuropske znanosti, a koji su se odvijali na ovom i hrvatskom prostoru? To pitanje nije dovoljno istraženo, ali se sa sigurnošću može tvrditi, ako su postojali, da su bili neznatni.

Franjevci su djelovali u Bosni za vrijeme turske vladavine, u kojoj se nje govala islamska kultura, pa su vjerovatno djelimično poznavali neke orijentalne rukopise islamskih znanosti. Isto tako, franjevci su u Bosni studirali u zapadnoeuropskim zemljama, gdje su usvajali matematička znanja prenešena u Europu iz islamskog svijeta drugim putem, a koja su nastala u doba najvećeg procvata islamskih znanosti. Prema tome, oni su već poznavali

19

Moje pitanje o autoru Hasanu ibn Abu Talibu bilo je upućeno na sve adrese u svijetu do kojih sam mogao doći. Nisam dobio nikakvu informaciju, a koja bi išla u prilog tome da je autor registriran u adekvatnoj literaturi. Možda jedini put kojim se nešto više može

saznati jest traganje i za ostalim prijepisima njegovih djela, ako postoje.

20

R-998, *Matematički rukopis*, Gazi Husrev-begova biblioteka u Sarajevu, 1340., str. 1.

matematička znanja što su se mogla pronaći u arapskim rukopisima u Bosni, pa je posredovanje franjevaca na kontaktima islamske i evropske matematike neznatno ili nikakvo.

Drugo važno pitanje jest mogućnost obrnutog komuniciranja, odnosno pitanje utjecaja zapadnoeuropske znanosti na islamske matematičke i astronomske rukopise nastale u vrijeme turske vladavine. Jedna činjenica koja ukazuje na takvu mogućnost jest turski rukopis *Beyan-i kesr-i a'sar-i ka'ide-i logaritme – Tumačenje razlomka s nazivnikom deset po logaritamskim pravilima*, koji se nalazi u Orijentalnoj zbirci Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu. Prema katalogu u Orijentalnoj zbirci HAZU, tekst je prepisan godine 1650. Međutim, postoji više naznaka da je isti prepisan u 18. stoljeću. Logaritme je otkrio John Napier oko 1594., a svoje otkriće objavio godine 1614. Međutim, islamski znanstvenici, mada su unaprijedili matematičko znanje od 12. do 17. stoljeća, nisu došli do pojma logaritma. U tom slučaju autor ovog rukopisa o logaritmima morao je taj pojam upoznati iz radova nastalih u zapadnoj Europi.²¹

U osmanskoj Turskoj, u vrijeme *Selima III* (1780.-1807.), došlo je do utjecaja europske znanosti. Naime, moderna matematika je u osmansku Tursku dolazila preko vojnih znanosti. Međutim, djela iz ovoga perioda pokazuju da se, s jedne strane, težilo uvođenju matematike i prirodnih znanosti radi reformiranja vojske, dok su na drugoj strani znanstvenici u medresama nastavljali pisati i prevoditi djela koja pripadaju starome dobu. Na taj je način u znanstvenom svijetu došlo do podvajanja.

Husein Rifki je bez sumnje bio jedna od ključnih osobnosti koje su prihvaćale utjecaj Zapada, naročito u oblasti matematike, astronomije i fizike. Međutim, način na koji su znanja prenošena bio je na razini novinskih informacija, dakle nisu objašnjavani principi na kojima je počivala određena znanost. Husein Rifki je napisao djelo *Mecmu'at-ul Muhendisin*, u kojem je koristio zapadne izvore, a koje sadrži matematiku, mehaniku i opis sprave za mjerenje razdaljina na moru. Posebno su značajni neki njegovi prijevodi. Sigurno, najznačajniji od njih jest prijevod Euklidovih *Elementa* od *Bonnycastle* s engleskog na turski jezik. Prijevod je objavljen 1789. Husein Rifki kaže da je *Bonnycastle* modernizirao Euklida.

Među znanstvenicima koji su doprinijeli da Osmanlije upoznaju zapadnu znanost bio je i *Ibrahim Edhem-paša* koji je živio u Egiptu. Vojnicima je držao satove iz crtanja karata, a oficirima iz aritmetike i geometrije. Značajno je njegovo djelo na turskom jeziku *Usul-u hendese*, koje predstavlja prijevod djela od *Legendrea*²² (1752.-1834.). U ovu je knjigu uvrstio i prijevod nekih teorema iz *Lacroixove*²³ knjige o geometriji, koje je on smatrao važnim. Izbor ove knjige bio je veoma dobar, jer je Legendre postao najslavniji matematičar u Francuskoj u 19. stoljeću. Dvije godine nakon što je *Usul-u hendese* preveden na turski, na arapski ga je preveo izvjesni *Mehmed Ismed*. Djelo je štampano u Egiptu pod naslovom *Mu'cem-ul Matbuat*.²⁴ Ovi primjeri pokazuju da je tijekom 18. stoljeća započeo utjecaj zapadnih znanosti na znanost osmanskih Turaka, a samim tim i na arapske znanosti. Pojavom matematičkog djela *Mu'cem-ul Matbuat* na arapskom jeziku, konačno se zatvara potpuni krug međusobnih utjecaja arapskih i europskih znanosti.

7. Zaključna razmatranja

Grčke rasprave iz matematike u srednjovjekovnoj Europi nisu bile otkrivene u prvom njihovoj dodiru. Klasična matematika bila je uglavnom izvedena iz Euklidovih *Elementata*. S obzirom na ezoteričnost, ovo antičko djelo bilo je pristupačno samo uskom krugu visoko educiranih pojedinaca. Zato je razvoj matematike u vrijeme renesanse morao biti nastavak tradicije arapskog Istoka i latinske Europe. Bosna i Hercegovina, padom pod osmansku Tursku, našla se u orijentalnom civilizacijskom krugu u kojem se njegovala srednjovjekovna arapska matematika. Time se u Europi dešavaju dva odvojena obrazovna sustava, a samim time i različite recepcije matematike. U jednom je slučaju izučavanje srednjovjekovne arapske matematike, a u drugom slučaju razvoj europske matematike kao nastavka arapske srednjovjekovne tradicije i latinske europske tradicije. Napokon, naglim razvojem europske znanosti, a time i matematike, dolazi do njezina utjecaja na orijentalne znanosti, a preko osmanske Turske.

Dževad Zečić

Mutual Influences of the Arabic and European Mathematics

The development of mathematics in Arabic language, in the Middle Ages, reached its peak by the 13th Century and then Europe was prepared to accept that science. It was only in the 15th Century with the *Summa de arithmetica*, written by *Luca Pacioli*, that Hindu-Arabic numbers came to be generally accepted and that was when the development of new ideas started in European mathematics. Science in Ottoman Turkey by the 19th Century had consisted of »the science in Arabic and Persian language« as well as their continuation that meant mostly its further decline. With the Ottoman Rule, Bosnia entered the sphere of Islamic-Oriental civilization reflected in all aspects of life. Arabic manuscripts of the classic Arabic period preserved and kept in Gazi Husrevbey Library in Sarajevo originate from that time. In the 18th Century the first military reform in Turkey made it possible for the foreign experts to come and widen the influence of the European science onto the »science in Arabic«. Thereby, in Ottoman Turkey, a full circle of mutual influences of Arabic and European mathematics has come to its natural close.

21

O tome vidi: Žarko Dadić, *Hrvati i egzaktne znanosti u osvitu novovjekovlja*, Naprijed, Zagreb 1994., str. 281-285.

22

Adrian Marie Legendre (1752.-1834.) – Njegova najšire poznata knjiga bila je *Elements de geometrie*, publicirana 1794. i dosta prilagođena kao zamjena za Euklida u Europi.

23

Sylvestre Francois Lacroix (1765-1843).

24

O tome vidi: A. Adnan Adivar, *Nauka kod osmanskih Turaka*, Islamska pedagoška akademija, Zenica 1999., str. 223-323.