Trigonometrija MAPLE-om

Anđela Zarić, Marina Šijak

Uvod

U dalekom prvom broju našeg malog-velikog časopisa *PlayMath*-a (ova slova čitate već u šestom), upoznali ste se s matematičkim programom MAPLE[1]. Tamo je pokazano kako nam MAPLE može olakšati život pojednostavljujući neke *„ružne”* izraze s kojima se susrećemo u prvome razredu. Sada ćemo tu temu malo proširiti promatranjem nekoliko primjena u trigonometriji.

Naredba *simplify*

Koliko nam je puta pao mrak na oči kad smo se suočili s nekim razlomkom kojemu se i u brojniku i u nazivniku nalaze trigonometrijske *funkcijice*. Neki od nas su, na primjer u stanju doći do ruba živčanog sloma nakon samo minute ili dvije transformiranja tih izraza po svim poznatim i nepoznatim pravilima i formulama, ali tada se sjetimo MAPLE-a i naredbe simplify.

Primjer 1. Pojednostavni izraz $\dfrac{1-\cos x+\cos 2x}{\sin 2x-\sin x}$.

Rješenje. Upišimo za početak naš izraz u računalo.

```
> A:=(1-cos(x)+cos(2*x))/(sin(2*x)-sin(x));
```

$$A := \frac{1-\cos(x)+\cos(2\,x)}{\sin(2\,x)-\sin(x)}$$

Izdajmo naredbu simplify da nam pojednostavni gornji izraz.

```
> simplify(A);
```

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

U čemu prepoznajemo $\operatorname{ctg} x$. ■

Kako na ovom jednostavnom primjeru vidimo, MAPLE se u rješavanju ovakvih zadataka koristi osnovnim adicijskim formulama za sinus i kosinus dvostrukog broja, faktorizacijom, trigonometrijskim oblikom Pitagorina poučka, itd. On to sve zna za nas. Računalu je trebalo nešto manje od 1 sekunde da riješi ovaj zadatak.

Naredba *assume*

Pogledajmo još jedan primjer gdje je rješavanje malo dugotrajnije.

Primjer 2. Pojednostavni $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

Rješenje. Postupak koji smo napravili u prethodnom primjeru, ovdje ćemo ponoviti.

```
> B:=((sqrt(1-(sin(x))^2))/(sqrt(1+(tan(x))^2)));
```

$$B := \frac{\sqrt{1-(\sin(x))^2}}{\sqrt{1+(\tan(x))^2}}$$

```
> simplify(B);
```

[1]Vidi: *Osnovno manipuliranje izrazima u MAPLE-u*, *PlayMath* br. 1 (2003.), str. 20.-22.

$$csgn\left(\cos\left(x\right)\right)\left(\cos\left(x\right)\right)^2 csgn\left(\cos\left(\frac{\left(\left|x\right|\right)^2}{x}\right)\right)$$

Kako računalo ne zna kakvi su izrazi pod korijenima (trigonometrijske funkcije se mogu poopćiti tako da uzimaju i daju kompleksne brojeve), ono ovaj izraz ne može pojednostavniti ako mu ne damo neke pretpostavke o brojevima. Tu će nam od koristi biti naredba assume. Kako u srednjoj školi trigonometrijske funkcije imaju realne argumente, uputit ćemo računalo da je $x \in \mathbb{R}$.

```
> assume(x,real);
> simplify(B);
```

$$\left(\cos\left(x\right)\right)^2$$

Time smo pokazali da je $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \cos^2 x$. ■

Expand* i *combine

Ove dvije naredbe koriste onima od nas kojima se ne da pamtiti sve one adicijske formule, a zagubili smo presvete žute tablice. Naredba expand, kako joj i samo ime kaže, proširuje određene izraze.

Primjer 3. Provjerimo da li je $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
Rješenje. Postupak ponavljamo:

```
> z:=cos(a-b);
```

$$z := \cos\left(a-b\right)$$

```
> expand(z);
```

$$\cos\left(a\right)\cos\left(b\right)+\sin\left(a\right)\sin\left(b\right)$$

Dakle, MAPLE poznaje ovu adicijsku formulu. ■

Sad svi mislite da je to lagano,a što bi bilo kad biste dobili primjer kao što je ovaj? Mi priznajemo da uopće nemamo volje raspisivati ga metodom *papira i olovke*!

Primjer 4. Zapiši izraz $\sin(4a+7b)$ preko $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$.
Rješenje. Upišimo izraz i proširimo ga!

```
> iz:=sin(4*a+7*b);
```

$$iz := \sin\left(4\,a+7\,b\right)$$

```
> expand(iz);
```

$$\begin{aligned}&512\sin(a)(\cos(a))^3(\cos(b))^7-896\sin(a)(\cos(a))^3(\cos(b))^5+448\sin(a)(\cos(a))^3(\cos(b))^3\\&-56\sin(a)(\cos(a))^3\cos(b)-256\sin(a)\cos(a)(\cos(b))^7+448\sin(a)\cos(a)(\cos(b))^5-224\sin(a)\cos(a)(\cos(b))^3\\&+28\sin(a)\cos(a)\cos(b)+512\,(\cos(a))^4\sin(b)(\cos(b))^6-640\,(\cos(a))^4\sin(b)(\cos(b))^4\\&+192\,(\cos(a))^4\sin(b)(\cos(b))^2-8\,(\cos(a))^4\sin(b)\\&-512\,(\cos(a))^2\sin(b)(\cos(b))^6+640\,(\cos(a))^2\sin(b)(\cos(b))^4-192\,(\cos(a))^2\sin(b)(\cos(b))^2\\&+8\,(\cos(a))^2\sin(b)+64\sin(b)(\cos(b))^6-80\sin(b)(\cos(b))^4+24\sin(b)(\cos(b))^2-\sin(b)\end{aligned}$$ ■

Čitateljima ostavljamo za vježbu da provjere istinitost zadnje tvrdnje. Na prethodnom se primjeru vidi da se naredba expand koristi i u formulama za trigonometrijske funkcije n-terostrukog broja.

A što ako dobijemo nekakav više člani izraz, a trebamo ga pojednostavniti? Pogađate – naredba combine.

Primjer 5. Pojednostavni $\sin a \cos b - \sin b \cos a$.
Rješenje. Naravno, svi već vidimo rezultat, ali provjerimo zna li ga MAPLE.

```
> iz:=sin(a)*cos(b)-sin(b)*cos(a);
```

$$iz := \sin\left(a\right)\cos\left(b\right)-\sin\left(b\right)\cos\left(a\right)$$

```
> combine(iz);
```

$$\sin\left(a-b\right)$$

Dakle, MAPLE zna i ovu adicijsku formulu. ■

Evo jednog trigonometrijskog identiteta u trokutu.

Primjer 6. Ako su α, β, γ kutovi trokuta, koliko je

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1?$$

Rješenje. Zadatak se rješava kao i na papiru samo što će nam MAPLE obaviti tehnički posao.

```
> iz1:=cos(2*alpha)+cos(2*beta)+cos(2*gamma)+4*cos(alpha)*cos(gamma)*cos(beta)+1;
```

$$iz1 := \cos(2\,\alpha) + \cos(2\,\beta) + \cos(2\,\gamma) + 4\,\cos(\alpha)\cos(\gamma)\cos(\beta) + 1$$

Kako su α, β i γ kutovi trokuta, računalu to nekako treba dati do znanja. Kut α zamjenit ćemo sa istovrijednim $\pi - \beta - \gamma$. To ćemo napraviti pomoću naredbe subs koja obavlja supstituciju.

```
> iz2:=subs(alpha=Pi-beta-gamma,iz1);
```

$$iz2 := \cos(4\,\pi - 2\,\beta - 2\,\gamma) + \cos(2\,\beta) + \cos(2\,\gamma) + 4\,\cos(2\,\pi - \beta - \gamma)\cos(\gamma)\cos(\beta) + 1$$

```
> iz3:=combine(iz2);
```

$$iz3 := 0$$

Znači, za kutove trokuta α, β i γ je $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1 = 0$. ■

Napomena. Navedeni izraz dobit ćemo ako i samo ako vrijedi $\alpha = (2k+1)\pi \pm \beta \pm \gamma$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$. (Probajte sami to pokazati!)

Slično kao i kod rješavanja zadatka na papiru ni na računalu ponekad nećemo moći riješiti zadatak od prve. Tada moramo pokušati na više načina.

Primjer 7. Dokaži da je

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,(\alpha + 60^\circ) + \mathrm{tg}\,(\alpha + 120^\circ) = 3\mathrm{tg}\,3\alpha.$$

Rješenje. Upišimo izraze na lijevoj i desnoj strani jednakosti.

```
> ls:=tan(alpha)+tan(alpha+Pi/3)+tan(alpha+2*Pi/3);
```

$$ls := \tan(\alpha) + \tan(\alpha + 1/3\,\pi) - \cot(\alpha + 1/6\,\pi)$$

```
> ds:=3*tan(3*alpha);
```

$$ds := 3\,\tan(3\,\alpha)$$

Kako bismo dokazali naš identitet, moramo pokazati da je $ls - ds = 0$. Pokušajmo s naredbom combine.

```
> combine(ls-ds);
```

$$\tan(\alpha) + \tan(\alpha + 1/3\,\pi) - \cot(\alpha + 1/6\,\pi) - 3\,\tan(3\,\alpha)$$

Nismo uspjeli! Probajmo naredbu expand i pogledajmo možemo li dobiveni izraz pojednostavniti.

```
> j1:=expand(ls-ds);
```

$$j1 := \tan(\alpha) + \frac{\tan(\alpha)+\sqrt{3}}{1-\tan(\alpha)\sqrt{3}} - \frac{-1+\sqrt{3}\cot(\alpha)}{\sqrt{3}+\cot(\alpha)} - 3\,\frac{3\,\tan(\alpha)-(\tan(\alpha))^3}{1-3\,(\tan(\alpha))^2}$$

```
> simplify(j1);
```

$$0$$

Time smo dokazali tvrdnju zadatka. ■

Zaključak

Nadam se da ste iz par ovih malih primjera uvidjeli korisnost ovog programa i da ćete ga pokušati nabaviti i, naravno, koristiti. Primjeri su, naravno, rješivi i ručno, ali kad naiđete na neki problem od kojeg vam pada mrak na oči, uvjerene smo da će vam ovaj program pomoći. Ove se operacije mogu koristiti i kod trigonometrijskih jednadžbi, uz neke prilagodbe i dodatke, a to ostavljamo vama da istražite. MAPLE-ovu bilježnicu u kojoj su pisane naredbe možete nabaviti posjetom web-stranica našeg časopisa.