Školsko natjecanje iz matematike 2004.

V. gimnazija
23. veljače 2004.

Prošlogodišnje školsko natjecanje održano je kao i prijašnjih godina u organizaciji aktiva matematike V. gimnazije. Natjecanje je prošlo bez većih problema. Najbolji učenici (oko 30 njih iz svakog razreda) plasirali su se dalje na općinsko natjecanje.
Natjecanje traje **3 sata**, dozvoljeno je služiti se priborom za pisanje i crtanje, tablicama s matematičkim formulama i džepnim računalom (*kalkulatorom*).

Prvi razred

1. Dokaži jednakost:
$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

2. Riješi jednadžbu:
$$\frac{2x+1}{6x^2-3x}-\frac{2x-1}{14x^2+7x}=\frac{8}{12x^2-3}.$$

3. Šesteroznamenkasti broj počinje znamenkom 1. Ako tu znamenku premjestimo na posljednje mjesto, dobiveni je broj tri puta veći od prvoga. Odredi taj broj.

4. Dokažite da 105 dijeli izraz $23^{12}-23^{10}-23^8+23^4+23^2-1$.

5. U pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom u vrhu C upisan je kvadrat tako da dva vrha leže na katetama, a četvrti vrh leži na hipotenuzi AB. Koliko posto površine $\triangle ABC$ zauzima površina upisanog kvadrata ako su duljine kateta $\triangle ABC$ $a = 8$cm i $b = 4$cm?

Drugi razred

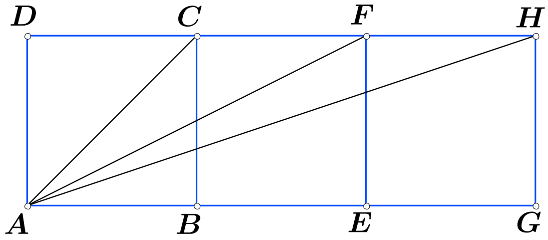
1. Izračunajte zbroj svih rješenja (u skupu $\mathbb{R}$) jednadžbe
$$(x+1)^2(x-4)^2+4(x^2-3x-4)=0.$$

2. Zadan je skup jednadžbi
$$\{2x^2+x(2a-3)-3a=0 \vdots\ a\in\mathbb{R}\}.$$

   a) Dokažite da postoji realni broj x_1 koji je rješenje svake od jednadžbi iz zadanog skupa.

   b) Ako u zadanom skupu jednadžbi ima takvih kojima je x_1 jedino rješenje, napišite kako one glase. Ako ih nema, onda dokažite to!

3. Jedan radnik završio bi određeni posao 10 dana ranije nego drugi. Rade li zajedno, posao će biti gotov za 12 dana. Koliko je dana za taj posao potrebno sporijem radniku?



Slika 2.5.

4. Dokažite da je broj $z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, realan, ako je $|z_1| = |z_2| = 1$ i $z_1 \cdot z_2 \neq -1$.

5. Tri jednaka kvadrata $ABCD$, $BEFC$, $EGHF$ smještena su jedan do drugoga (vidi sliku). Dokažite da vrijedi:
$$\angle CAB + \angle FAE + \angle HAG = 90^\circ$$

Treći razred

1. Riješi jednadžbu:
$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2.$$

2. Riješi nejednadžbu:
$$0.2^{\cos 2x} - \frac{1}{25^{\cos^2 x}} < 4 \cdot 125^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Ako kutovi trokuta zadovoljavaju relaciju
$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0,$$
tada je jedan od tih kutova 60°. Dokaži!

4. Komad papira ima oblik jednakostraničnog trokuta stranice 15. Presavijmo papir tako da točka A padne na stranicu $\overline{BC}$ u točku D tako da je $|BD| = 3$. Papir je presavijen po dužini $\overline{EF}$ pri čemu je E na $\overline{AB}$, F na $\overline{AC}$. Izračunaj $d(E, F)$.

5. Bridovi koji izlaze iz vrha D tetraedra $ABCD$ međusobno su okomiti. Označimo s α, β, γ kutove trokuta $\triangle ABC$ i neka je $|AD| = a$, $|BD| = b$, $|CD| = c$. Dokaži da vrijedi
$$\operatorname{ctg} \alpha : \operatorname{ctg} \beta : \operatorname{ctg} \gamma = a^2 : b^2 : c^2.$$

Četvrti razred

1. Neka su z i w kompleksni brojevi takvi da vrijedi $|z| = |w| = |z - w|$. Izračunaj $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{2004}$.

2. Dokaži da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{2n-1}{n}$.

3. Raspolažemo šahovskom pločom i imamo 32 pločice domina takve da svaka od njih prekriva točno dva šahovska polja. Da li je moguće s 31-om pločicom domina prekriti šahovsku ploču tako da ostanu slobodna dva krajnja polja jedne od dijagonala? Dokaži tvrdnju!

4. Brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1} \ldots$ čine aritmetički niz s diferencijom d. Da li i zbrojevi od po n članova, $S_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $S_2 = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$, $\ldots$ čine aritmetički niz? Dokaži!

5. Dane su četiri točke A, B, C, D na sferi polumjera R, takve da su sve međusobno jednako udaljene. Odredi kut pod kojim se iz središta sfere vide dvije od tih točaka!

UPUTE I RJEŠENJA NA STRANICI 40.