UDK 551.4
Pregledni članak

Prof. dr. sc. Miljenko Crnjac
Ekonomski fakultet u Osijeku

NEJEDNAKOSTI MEĐU SREDINAMA

Znajući da su sredine vrlo važni statistički pojmovi, to je od interesa barem neke od njih precizno definirati. U ovom radu se to upravo čini, štoviše, daju se njihove usporedbe i prednosti u ekonomskim razmatranjima.

Budući da sredine daju bitna obilježja populaciji, od interesa je za statistiku ispitati njihova svojstva i usporedbe.

1. NEKE VRSTE SREDINA

Često se od više brojeva tvore neke srednje vrijednosti ili sredine. Najobičnija je vrst sredina, tzv. aritmetička sredina.

Definicija 1.1. Pod aritmetičkom sredinom $A_2(a_1, a_2)$ dvaju brojeva a_1, a_2 razumijevamo njihov poluzbroj:

$$A_2(a_1,a_2)=\frac{a_1+a_2}{2}. \qquad (1)$$

Brojevi a_1, a_2 mogu biti bilo koji realni brojevi.

Općenitiji je pojam aritmetička sredina od n brojeva:

Definicija 1.2. Pod aritmetičkom sredinom $A_n(a_1, a_2, \dots ,a_n)$ od n brojeva $a_1, a_2, \dots ,a_n$, razumijevamo n-ti dio njihova zbroja:

$$A_n(a_1, a_2, \dots ,a_n)=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}. \qquad (2)$$

Umjesto $A_n(a_1, \dots ,a_n)$ pišemo kraće

$$A_n(a_1, a_2, \dots ,a_n)=A_n(a) \qquad (3)$$

gdje je $a=(a_1, a_2, \dots ,a_n)$ konačan niz brojeva.

Može se dogoditi da su neki od brojeva kojima tvorimo sredinu međusobno jednaki. Tvorimo li sredinu od 6 brojeva a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, imamo

$$A_6(a)=\frac{a_1+a_1+a_1+a_2+a_2+a_3}{6}. \qquad (4)$$

Zapravo je ovdje sredina tvorena od samo tri različita broja a_1, a_2, a_3, pa umjesto (4) pišemo:

$$A_6(a)=\frac{3a_1+2a_2+a_3}{3+2+1}. \qquad (5)$$

Vidimo da su ta tri broja ušla u tvorbu sredine s različitim težinama. Faktore 3, 2, 1 nazivat ćemo stoga težinskim faktorima ili težinama. Poopćujući takvu težinsku sredinu pripustit ćemo za težinske faktore bilo koje realne brojeve. Tako nastaje

Definicija 1.3. Neka je zadano n realnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ i n realnih brojeva $p_1, p_2, \dots, p_n$, koje ćemo nazivati težinskim faktorima. Zbroj $p_1+p_2+\dots+p_n$ težinskih faktora neka je različit od nule. Onda pod težinskom aritmetičkom sredinom $A_n(a)$ brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ razumijevamo:

$$A_n(a)=\frac{p_1a_1+p_2a_2+\dots+p_na_n}{p_1+p_2+\dots+p_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ia_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}. \qquad (6)$$

Primjer: U skupini od 47 osiguranika doživljene su nesreće na sljedeći način:

Broj nesreća	1	2	3	4	5
Frekvencija	6	5	13	16	7

Ako se pitamo koliko se prosječno dogodilo nesreća u spomenutoj skupini, dobit ćemo odgovor :

$$A_{47}(a)=\frac{6\cdot1+5\cdot2+13\cdot3+16\cdot4+7\cdot5}{6+5+13+16+7}=3.28.$$

Ovaj broj daje obilježje ovoj grupi osiguranika.

Ako sve težinske faktore pomnožimo s istim brojem λ, sredina se ne mijenja jer se time očito brojnik i nazivnik u (6) množi istim brojem λ. Možemo λ napose odabrati tako da zbroj novih težinskih faktora bude jednak 1. Tako u (5) možemo težinske faktore pomnožiti sa $\frac{1}{6}$ pa izlazi:

$$A_6(a)=\frac{3}{6}a_1+\frac{2}{6}a_2+\frac{1}{6}a_3=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{6}a_3. \qquad (7)$$

Kažemo da smo težinske faktore normirali. Općenito se normirani težinski faktori $q_1, q_2, \dots, q_n$ dobivaju iz bilo kojih težinskih faktora $p_1, \dots, p_n$ relacijom:

$$q_i=\frac{p_i}{p_1+p_2+\dots+p_n}=\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \qquad (8)$$

Iz toga izlazi:

Definicija 1.4. Neka je zadano n realnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ i n realnih brojeva $q_1, q_2, \dots, q_n$ sa zbrojem 1, koje ćemo nazivati normiranim težinskim faktorima. Tada pod težinskom aritmetičkom sredinom $A_n(a)$ tih n brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ razumijevamo

$$A_n(a)=q_1a_1+q_2a_2+\dots+q_na_n=\sum_{i=1}^{n}q_ia_i. \qquad (9)$$

Jasno je da težinske sredine prelaze u obične ako su svi težinski faktori jednaki. Napose su onda svi normirani težinski faktori jednaki $\frac{1}{n}$

Prelazimo sada na drugačije tvorbe sredina pri čemu se redovito ograničavamo na pozitivne realne brojeve i na pozitivne težinske faktore.

Definirajmo najprije (običnu) geometrijsku sredinu od dva broja a_1 i a_2.

Definicija 1.5. Pod geometrijskom sredinom $G_2(a_1, a_2)$ dvaju pozitivnih brojeva a_1, a_2 podrazumijevamo pozitivni drugi korijen iz njihova produkta:

$$G_2(a_1, a_2)=G_2(a)=\sqrt{a_1a_2}. \qquad (10)$$

Vidi se da bi pripuštanje vrijednosti nula bilo neinteresantno jer bi onda geometrijska sredina bila jednaka nuli, a pripuštanje negativnih vrijednosti uzrokovalo bi to da korijen može postati imaginaran. Stoga je opravdano da se ograničimo na pozitivne brojeve.

Poopćimo pojam geometrijske sredine na slučaj n brojeva:

Definicija 1.6. Pod geometrijskom sredinom $G_n(a_1, \dots, a_n)$ od n pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$, kraće $G_n(a)$ razumijevamo pozitivni n-ti korijen iz njihova produkta:

$$G_n(a_1, \dots, a_n)=G_n(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (11)$$

I ovdje je moguć slučaj da su neki od tih brojeva jednaki. Tvorimo li geometrijsku sredinu brojeva $a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3$, izlazi :

$$G_6(a)=\sqrt[6]{a_1\cdot a_1\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_2\cdot a_3}=\sqrt[6]{a_1^3a_2^2a_3}=\sqrt[3+2+1]{a_1^3a_2^2a_3}=$$

$$=\left(a_1^3a_2^2a_3\right)^{\frac{1}{6}}=a_1^{\frac{3}{6}}a_2^{\frac{2}{6}}a_3^{\frac{1}{6}}=a_1^{\frac{1}{2}}a_2^{\frac{1}{3}}a_3^{\frac{1}{6}}. \qquad (12)$$

Dolazimo ovdje do težinske geometrijske sredine gdje se pojavljuju težinski eksponenti ili težine 3, 2, 1 ... Općenito izlazi:

Definicija 1.7. Neka je zadano n pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ i n pozitivnih težinskih eksponenata $p_1, p_2, \dots, p_n$ (kojima je zbroj sigurno različit od nule, jer su svi pozitivni). Tada pod težinskom geometrijskom sredinom $G_n(a_1, \dots, a_n)$, kraće $G_n(a)$ razumijevamo:

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) = G_n(a) = \sqrt[p_1+\ldots+p_n]{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}} =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \tag{13}$$

Prethodni primjer daje

$$\sqrt[47]{1^6 \cdot 2^5 \cdot 3^{13} \cdot 4^{16} \cdot 5^7} =$$

$$= \sqrt[47]{1 \cdot 32 \cdot 1594323 \cdot 4294967296 \cdot 78125} = 2.97.$$

Vidimo da smo dobili prosjek koji je nešto niži od aritmetičke sredine.

Da li je to stvarno uvijek tako?

Nije teško primijetiti da je računanje aritmetičke sredine mnogo jednostavnije nego geometrijske sredine.

Primijetimo da između geometrijske sredine i aritmetičke sredine postoji izvjesna veza.

Naime, logaritmiranjem formule (13) dobivamo:

$$\log G_n(a) = \frac{p_1 \log a_1 + p_2 \log a_2 + \ldots + p_n \log a_n}{n}$$

$$\log G_{47}(a) = \frac{6\log 1 + 5\log 2 + 13\log 3 + 16\log 4 + 7\log 5}{47} =$$

$$= \frac{6 \cdot 0 + 5 \cdot 0.30103 + 13 \cdot 0.47712 + 16 \cdot 0.60206 + 7 \cdot 0.69879}{47} =$$

$$= 0.47305 \Rightarrow G_{47}(a) = 2.97.$$

Bez obzira što je računanje geometrijske sredine kompliciranije ipak se u statistici upotrebljava u slučajevima koji su prikladniji, npr. procjena broja pučanstva između dva popisa, jer se pretpostavlja da pučanstvo raste geometrijskom progresijom.

Ako želimo pratiti kretanje cijena, proizvodnje i tome slično, preporuča se računanje geometrijske sredine (indeksa).

Uvođenjem normiranih težinskih eksponenata q_i prema (8) izlazi analogno:

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) = G_n(a) = a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \tag{14}$$

jer se očito i ovdje mogu svi brojevi p_i, pomnožiti s nekim faktorom λ, a da se vrijednost geometrijske sredine ne promijeni. To se jasno vidi u specijalnom slučaju (12), a vrijedi dakako općenito prema (13) i (14).

Oznake $A_n(a_1, \ldots, a_n)$, $G_n(a_1, \ldots, a_n)$, odnosno $A_n(a)$, $G_n(a)$ iste su za težinske i obične sredine, jer su obične sredine specijalni slučaj težinskih kad su težinski brojevi svi jednaki. Razumije se da iz teksta mora biti jasno o kojim se težinskim faktorima, odnosno eksponentima radi.

Definirajmo dalje harmonijsku sredinu od n brojeva.

Definicija 1.8. Recipročna vrijednost harmonijske sredine $H_n(a_1, \ldots, a_n)$ od n pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s pozitivnim težinskim faktorima, jednaka je aritmetičkoj sredini recipročnih vrijednosti zadanih brojeva:

$$\frac{1}{H_n(a)} = A_n\left(\frac{1}{a}\right) \quad ili \quad H_n(a) = \left[A_n\left(a^{-1}\right)\right]^{-1}. \tag{15}$$

Drugim riječima, opći slučaj harmonijske sredine je

$$H_n(a) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{-1}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{-1} = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \ldots + \frac{p_n}{a_n}}, \tag{16}$$

odnosno, s normiranim težinskim faktorima:

$$H_n(a) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{q_1}{a_1} + \frac{q_2}{a_2} + \ldots + \frac{q_n}{a_n}}. \tag{17}$$

Za običnu harmonijsku sredinu vrijedi

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}, \tag{18}$$

dakle:

$$H_n(a) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}\right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}. \tag{19}$$

Prema našem primjeru imamo:

$$H_{47}(a) = \frac{47}{\frac{6}{1} + \frac{5}{2} + \frac{13}{3} + \frac{16}{4} + \frac{7}{5}} =$$

$$= \frac{47}{6 + 2.5 + 4.333 + 4 + 1.4} = 2.58.$$

Kako vidimo, dobili smo broj manji i od aritmetičke sredine i od geometrijske sredine.

Da li je to uvijek tako?

Harmonijska sredina se najčešće primjenjuje pri traženju prosjeka vremena za izradu jedinice proizvoda, prosjek vremena za prevaljenu jedinicu puta itd.

U slučaju dvaju brojeva izlazi za težinsku harmonijsku sredinu specijalno:

$$H_2(a_1,a_2)=\frac{p_1+p_2}{\frac{p_1}{a_1}+\frac{p_2}{a_2}}=\frac{(p_1+p_2)a_1a_2}{p_2a_1+p_1a_2}=$$

$$=\frac{1}{\frac{q_1}{a_1}+\frac{q_2}{a_2}}=\frac{a_1a_2}{q_2a_1+q_1a_2}. \qquad (20)$$

Obična harmonijska sredina, za koju je $q_1=q_2=\frac{1}{2}$, *izražena je dakle sa*

$$H_2(a_1,a_2)=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}. \qquad (21)$$

Definirajmo još jednu često upotrebljavanu sredinu, a to je kvadratna sredina.

Definicija 1.9. Težinska kvadratna sredina $M_n(a_1,\dots,a_n)$, *kraće* $M_n(a)$ *s pozitivnim težinskim faktorima je pozitivni drugi korijen iz aritmetičke sredine kvadrata zadanih brojeva. Prema tome je težinska kvadratna sredina dana sa:*

$$M_n(a)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^2}{\sum_{i=1}^{n}p_i}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}q_ia_i^2}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}q_ia_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left[A_n\left(a^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

Za $q_1=q_2=\dots=q_n=\frac{1}{n}$, *tj. za običnu kvadratnu sredinu izlazi* $M_n(a)=$

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}} \qquad (23)$$

2. NEJEDNAKOSTI MEĐU SREDINAMA

Teorem 2.1. Za svaki konačan niz pozitivnih brojeva $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ važe nejednakosti:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}\le(a_1a_2\dots a_n)^{\frac{1}{n}}\le$$

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\le\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

tj. $H_n(a)\le G_n(a)\le A_n(a)\le M_n(a)$.

U ovim nejednakostima znak jednako važi ako i samo ako je $a_1=a_2=\dots=a_n$.

Dokaz. a) Promatrajmo najprije nejednakost

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\ge(a_1a_2\dots a_n)^{\frac{1}{n}}. \qquad (24)$$

Za n = 2 nejednakost (24) postaje

$$\frac{a_1+a_2}{2}\ge\sqrt{a_1a_2} \text{ tj. } \left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\ge0.$$

Ova nejednakost očigledno je točna i u njoj važi znak jednako ako i samo ako je $a_1=a_2$. Pretpostavimo sada da (24) vrijedi za neko n = k, tj. da je

$$A_k\ge G_k \qquad (25)$$

Tada je na osnovi (24),

$$A\equiv\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\ge\left(a_{k+1}A_{k+1}{}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}\equiv G. \qquad (26)$$

Na osnovi (24) i (26) dobivamo

$$A_k+A=\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}+$$

$$+\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}=$$

$$=\frac{(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}=2A_{k+1}, \text{ tj.}$$

$$A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + A) \geq (A_k A)^{\frac{1}{2}} \geq (G_k G)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(G_k^k G^k\right)^{\frac{1}{2k}} =$$

$$= \left(G_k^k a_{k+1} A_{k+1}^{\ k-1}\right)^{\frac{1}{2k}} = \left(G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{2k}} \qquad (27)$$

Iz prethodnog slijedi

$$A_{k+1} \geq \left(G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{2k}}, \quad A_{k+1}^{2k} \geq G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1},$$

$$A_{k+1}^{k+1} \geq G_{k+1}^{k+1}, \quad A_{k+1} \geq G_{k+1},$$

pa je dokaz završen.

Dokazat ćemo sada da u nejednakosti (24) važi znak jednakosti ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ako je $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$, u (24) važi znak jednakosti. Neka su sada bar dva od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različiti, na primjer neka je $a_1 \neq a_2$. Tada je

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} =$$

$$= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geq$$

$$\geq \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_n\right]^{\frac{1}{n}} >$$

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}, \text{ jer je } \frac{a_1 + a_2}{2} >$$

$$> \sqrt{a_1 a_2} \quad (a_1 \neq a_2),$$

pa je dokaz nejednakosti (24) završen.

b) Za brojeve $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ s obzirom na nejednakost (24), imamo

$$\left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}, \qquad (28)$$

gdje važi znak jednakosti ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Iz (28) slijedi

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

c) Ako se na desnoj strani identiteta $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n)$, umjesto $2a_i a_k$ stavi $a_i^2 + a_k^2$ $(\geq 2a_i a_k)$, dobiva se nejednakost

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right), \qquad (29)$$

koja važi za sve realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Iz (29) slijedi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \left\{ n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ tj.}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

LITERATURA

1. Pauše, Ž.: Uvod u matematičku statistiku (1993), Zagreb, Školska knjiga

2. Scitovski, R.; Galić, R.; Šilac-Benšić, M.: Numerička analiza, vjerojatnost i statistika (1993), Osijek

3. Vranić, V.: Vjerojatnost i statistika, (1971), Zagreb, Tehnička knjiga