18. nordijsko matematičko natjecanje

Četvrtak, 1. travnja 2004.

Nakon školskog natjecanja, donosimo vam i zadatke s prošlogodišnjeg nordijskog natjecanja. Čitatelji su već imali priliku upoznati se s ovim natjecanjem, zadatke s prethodnog (17.) nordijskog natjecanja objavili smo u 2. broju, a rješenja u 3. broju.

Zadatci koji su pred vama elegantni su i (barem jedno) rješenje svakog zadatka može shvatiti i učenik prvog razreda. To ne znači da treba podcijeniti zadatke, naprotiv: treba doći do rješenja!

1. 27 loptica numerirano je od 1 do 27 i svaka je smještena u jednu od tri kutije, crvenu, plavu ili žutu. Koje su moguće vrijednosti loptica u crvenoj kutiji ako je prosjek brojeva zapisanih na lopticama u crvenoj, plavoj i žutoj kutiji redom 15, 3 i 18.

2. Neka je $F_1 = 0$, $F_2 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ za $n \in \mathbb{N}$, niz Fibonaccijevih brojeva. Pokaži da postoji (strogo) rastući aritmetički niz cijelih brojeva koji nema nijedan zajednički broj s Fibonaccijevim nizom. [Niz se zove *aritmetičkim* ako je razlika svakih dvaju uzastopnih članova stalna (konstantna).]

3. Neka je $x_{11}, x_{21} \dots, x_{n1}$, $n > 2$, niz cijelih brojeva takvih da nisu svi x_{i1} jednaki. Neka je niz $x_{1,k}, x_{2,k} \dots, x_{n,k}$ definiran kao

$$x_{i,k} = \frac{x_{i,k-1} + x_{i+1,k-1}}{2},\ i = 1, 2, \dots, n-1, \quad x_{n,k} = \frac{x_{n,k-1} + x_{1,k-1}}{2}.$$

   Ako je n neparan broj, pokaži da za neke $j, k \in \mathbb{N}$, broj $x_{j,k}$ nije cijeli. Vrijedi li ova tvrdnja i za parne n?

4. Neka su a, b i c stranice trokuta i neka je R polumjer opisane kružnice. Dokaži da je

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}.$$

Vrijeme pisanja je **4 sata**. Svaki zadatak vrijedi **5 bodova**.
Dozvoljeno je koristiti **samo pribor za pisanje i crtanje**!

UPUTE I RJEŠENJA NA STRANICI 49.