Metodički obzori 2(2007)2
Stručni rad
Professional article
UDK: 371.3 : 53
Primljeno: 15. 4. 2007.

PRIMJENA MATEMATIČKIH MODELA U METODOLOGIJI RJEŠAVANJA NUMERIČKIH ZADATAKA IZ FIZIKE

Luciano Kuhar, prof.
Visoka tehnička škola u Puli,
Politehnički studij

Sažetak

Riješiti zadani problem iz prirodnih znanosti najčešće znači postići cilj u obliku rezultata, najčešće izraženog u numeričkom obliku, krenuvši od zadanih parametara. Kada je zadani problem iz oblasti fizike radi se o determiniranju vrijednosti jedne ili više nepoznanica na temelju veličina koje su a priori zadane ili se iz samog problema mogu prepoznati. Opisana metoda rješavanja problema iz prirodnih znanosti potječe još iz vremena Galilea, koji je prvi uveo eksperiment u metodologiju znanstvenog istraživanja u fizici. Međutim, kod virtualnih problema, poput opisanog zadatka iz kinematike, zna se desiti da se studentu čini da je zadatak nerješiv zbog pomanjkanja ulaznih parametara. U takvom slučaju se primjenjuju tako zvani *matematički modeli*. Opisani matematički model je vrlo jednostavan, ali može zavarati ako se zadatak pokušava riješiti *mnemotehnički.*

Mnemotehnička metoda je vrlo raširena kod učenika i studenata skromne pripremljenosti, a sastoji se od pokušaja da se mehanički odnosno mnemotehnički pokušava pronaći dizajn formule koja bi, otprilike, odgovarala zadatku. Znanstveno puno ozbiljniji su matematički modeli koji, na prvi pogled, nemaju ništa zajedničkog sa zadanim problemom (u opisanom primjeru dolazimo do fenomena titranja i njihanja što sa vlakom nema nikakve veze), ali proizvode dobar rezultat.

Složeni matematički modeli i matematičke simulacije, koje mogu rješavati samo brza računala, koriste se u fizici atmosfere kod sinoptičke meteorologije za izradu dugoročnih prognoza vremena.

Ključne riječi: *numerički problemi u prirodnim znanostima, parametri ili veličine zadanog problema, metodologija znanstvenog istraživanja, eksperiment, Galileo Galilei, formula, matematička povezanost fizičkih veličina, mnemotehnička metoda, matematički model*

Ovladati znanjem iz fizike znači znati primijeniti u praksi njezine zakonitosti. U rješavanju numeričkih zadataka iz fizike potrebno je razumjeti njihov logički smisao i uočiti fizičke pojave koje se u zadacima javljaju. Zadani problemi se, najčešće, rješavaju u općem obliku tako da se izrazi radna formula, često nazvana i algoritam, u koju uvrstite zadani podaci, vodeći računa o SI–sustavu mjernih jedinica, te izračuna numerički rezultat uzimajući o obzir stupanj točnosti i aproksimacije primijenjenih podataka. Nakon eventualnog kritičkog osvrta ili komentara zadatak je potpuno obrađen.

Postoji li univerzalni obrazac za rješavanje numeričkih zadataka iz fizike? Mogu li se, ponekad, zadaci rješavati nekonvencionalnim metodama koje i nisu strogo fizikalno prihvatljive, ali su matematički korektne?

Mora li se uvijek strogo primjenjivati konvencionalni metodički pristup, ili se, prilikom rješavanja numeričkih zadataka može, ponekad, primijeniti neka nekonvencionalna konceptualna metoda?

Na ta pitanja pokušat ćemo odgovoriti tijekom rješavanja ovog, na prvi pogled, jednostavnog zadatka iz kinematike:

Zamisli se vlak neodređene, ali velike, duljine (L) koji se inercijom giba horizontalnom putanjom u potpunom odsustvu pogona, trenja i otpora zraka. U nekom određenom trenutku vlak naiđe na uspon nagiba 30^o prema horizontalnoj ravnini.

Odrediti algoritme za izračunavanje:

a) koliki će put prijeći vlak do zaustavljanja (X);

b) koliko će biti vrijeme potrebno da se vlak zaustavi (t).

Pretpostaviti da u trenutku zaustavljanja dio vlaka se još nalazi na horizontalnom dijelu putanje.

Neka je duljina vlaka L, a modul njegove početne brzine v_o.

Zbog nedovoljnog broja zadanih argumenata, rješenje ovog fizikalnog zadatka bilo bi nemoguće ako bismo pokušali primijeniti samo metodologiju koja se koristi prilikom rješavanja numeričkih zadataka iz kinematike i dinamike.

Zato ćemo se koristiti matematičkom analogijom ili matematičkim modelom koji, na prvi pogled, nema ničeg zajedničkog sa fizikalnim kontekstom nekog vlaka koji se giba uz neku kosinu. Radi se o jednoj jednostavnoj, ali vrlo korisnoj, konceptualnoj operaciji koja u matematici nije rijetka.

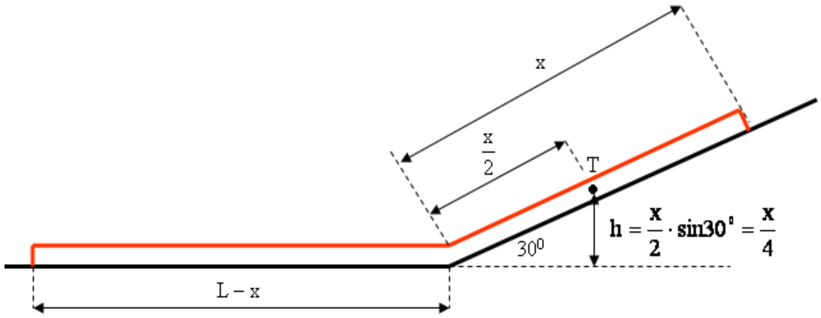
Odmah moramo primijetiti da se radi o jednom apstraktnom problemu, jer se postavljanju određeni idealni ulazni uvjeti: putanja je idealno horizontalna, vlak se giba u potpunoj odsutnosti trenja i otpora zraka, uzbrdica ima karakteristike savršene kosine. Osim toga zamislili smo vlak kao tijelo koje nije sastavljeno od međusobno spojenih elemenata (lokomotiva i vagoni) već kao neka ogromna neprekidna i homogena "zmija".

Naravno da to ne može biti realno stanje, ali je jedino moguće kako bismo mogli riješiti taj zadatak.

Promotrimo i analizirajmo grafički prikaz našeg problema koji je prikazan na slici 1.

U nekom određenom trenutku dio vlaka dužine x biti će na kosini dok će se preostali dio vlaka $L–x$ nalaziti još na horizontalnoj putanji. U tom se trenutku vlak giba brzinom $v < v_o$. Ako sa M pretpostavimo ukupnu masu vlaka tada će masa dijela vlaka koji se nalazi na kosini biti

$$m = M \cdot \frac{x}{L} .$$



Slika 1.

Prema definiciji težišta ukupna dijela vlaka koji se nalazi na kosini je koncentrirana u točki težišta T odnosno na udaljenosti $\frac{x}{2}$ od početne točke kosine.

Uzmemo li sada u obzir da je referentna ravnina na kojoj se vlak nalazi upravo njegova horizontalna putanja. To će ujedno biti i referentna ravnina njegove gravitacijske potencijalne energije.

Temeljem zakona o održanju ili konzervaciji energije kinetička energija vlaka u gibanju brzinom v_0 jednaka je zbroju kinetičke energija vlaka u gibanju uz kosinu i gravitacijske potencijalne energije dijela vlaka koji se nalazi na kosini.

Možemo, dakle, napisati slijedeću relaciju:

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot v_o^2 = \frac{1}{2} M \cdot v^2 + M \cdot \frac{x}{L} \cdot g \cdot \frac{x}{4} .$$

Početna brzina vlaka se na kosini smanjuje tako da vrijedi relacija $v_o \to v$, a vlak će stati kada brzina bude jednaka ništici, $v = 0$

Pretpostavimo da je traženi zaustavni put X, tada će dužina dijela vlaka koji se nalazi na kosini biti jednaka zaustavnom putu, tj. $x = X$.

Sada gornji izraz poprima slijedeći oblik

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot v_o^2 = \frac{M}{L} \cdot g \cdot \frac{X^2}{4} ,$$

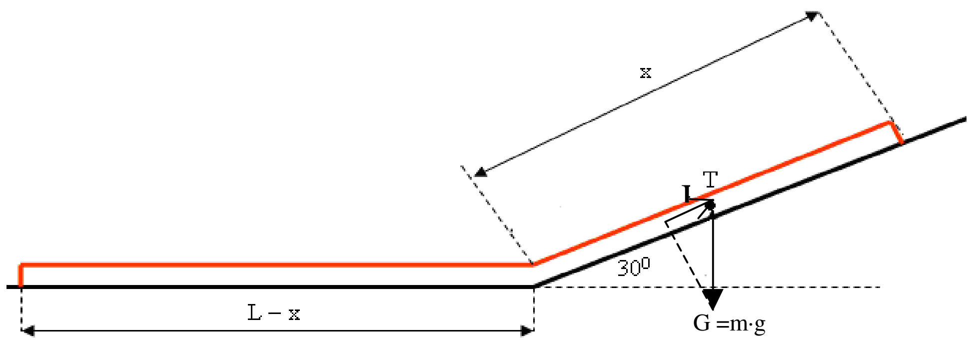
nakon kraćenja izlučimo algoritam za izračunavanje zaustavnog puta

$$X = v_o \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{L} .$$

Ili, aproksimativno

$$X = 0{,}4515 \cdot v_o \cdot \sqrt{L}\ .$$

Za određivanje izraza za izračunavanje vremena u kojem će se vlak zaustaviti, potrebno je odrediti rezultirajuću silu koja djeluje na vlak. Za taj izračun možemo zanemariti dio vlaka koji se nalazi na horizontalnoj putanji. Naime, na taj dio vlaka djeluju dvije vertikalne sile jednakih modula i suprotnih vektorskih usmjerenja, težina vlaka i reaktivna sila tračnica, koje se međusobno poništavaju, odnosno njihova je rezultanta nula (slika 2).



Slika 2.

Na dijelu kosine u dužini x djeluju dvije sile, jedna paralelna s ravninom kosine (F) i druga sila težine dijela vlaka koji se nalazi na kosini (G). Njihova međusobna veza u trenutku zaustavljanja vlaka je:

$$F - G \cdot sin 30^{o} = 0$$

odnosno

$$F = G \cdot sin 30^{o}\ .$$

Budući da je $G = m \cdot g$ odnosno

$$G = M \cdot \frac{x}{L} \cdot g$$

u konačnici dobivamo

$$F = M \cdot \frac{x}{L} \cdot g \cdot sin 30^{o}\ ,$$

ili

$$F = M \cdot \frac{x}{2 \cdot L} \cdot g\ .$$

Budući da je M masa cjelokupnog vlaka, a F sila koja djeluje na cjelokupni vlak izraz $\frac{x}{2\cdot L}\cdot g$ predstavlja modul negativne akceleracije koja djeluje na vlak u smjeru njegovog gibanja. Taj izraz možemo napisati i ovako:

$$|\,a\,| = \frac{g}{2\cdot L}\cdot x\,,$$

gdje su (g i L) konstante, a pomak (x) varijabla.

Konstanta se, dakle, množi s varijabilnim pomakom.

Ovaj izraz ima identičnu matematičku formu kao i izraz

$$|\,a\,| = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot x\,,$$

gdje se također konstanta $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ množi s nekim varijabilnim pomakom (x).

Ovaj drugi izraz predstavlja akceleraciju harmonijskih oscilacija: gibanje njihala ili akceleraciju tijela koje harmonijski oscilira na opruzi.

Iako gibanje vlaka na kosini i harmonijske oscilacije su različiti fizikalni fenomeni, matematičko pravilo koje ih opisuje je identično.

Matematički model koji vrijedi u jednom slučaju može se primijeniti i na druge slučajeve.

Logika koja ih povezuje je slijedeća: vlak prelazi iz modula neke maksimalne brzine u stanje nulte brzine u istom vremenskom intervalu Δt kao i tijelo koje harmonijski oscilira za četvrtinu svoje periode, tj.

$$\Delta t = \frac{1}{4}T\,.$$

I brzina kod harmonijskog gibanja mijenja svoj modul od maksimalne do nulte.

Izjednačimo li oba izraza po $|\,a\,|$ dobivamo:

$$\frac{g}{2\cdot L}\cdot x = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot x\,,$$

odnosno

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\cdot L}{g}}$$

i dalje, budući da je $\Delta t = \frac{1}{4}T$:

$$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{L}{2\cdot g}}$$

Posljednji izraz predstavlja traženi algoritam za izračunavanje koliko će vremena biti potrebno da se vlak zaustavi.

Za rješavanje ovog problema, umjesto da analiziramo samo zadane činjenice odnosno gibanje vlaka na kosini, primijenili smo druga dva načina gibanja koji, na prvi pogled, nemaju ništa zajedničko sa našim zadatkom, ali imaju istovjetan *matematički model*.

Ovakva konceptualna metodologija u fizici je to češća što su zadani problemi kompleksniji. Kada uobičajene metode u rješavanja numeričkih zadataka ne pomažu korisne su ovakve formalne i matematičke analogije.

APPLYING MATHEMATICAL METHODS IN THE METHODOLOGY OF SOLVING NUMERICAL PHYSICS PROBLEMS

S u m m a r y

To solve a given problem in natural sciences most frequently means achieve a target in the form of a result, often displayed in a numerical form, and starting from some given parameters. When the set problem concerns Physics it is about determining the values of one or more variables based on the basis of values given a priori or easily recognizable from the very problem. The described method of solving problems in natural sciences dates from Galilei's times, who first introduced the experiment in the methodology of scientific research in physics. However, with virtual problems, as in the case of the described kinematics task, it happens that the student believes the problem to be insolvable for lacking initial parameters. In such cases the so called *mathematical models* are applied. The described mathematical model is very simple, but it can be delusive if the task is tried to be solved *mnemotechnically.*

The mnemotechnical method is popular among pupils and students with poor learning basis, and consists of trials to mechanically, i.e. mnemotechnically find a designed formula that could, approximately, match the problem. Scientifically, the more serious mathematical models which, at first sight, seem to have nothing in common with the given problem (in the described example we come upon the phenomenon of oscillation and swinging that has nothing to do with the train), in fact produce a good result.

Complex mathematical models and mathematical simulations that can be solved only by fast computers are used in the physics of climate, synoptic meteorology, for long-term weather forecasts.

Key words: ***numerical problems in natural sciences, parameters or values*** *Galileo* ***of a given problem, methodology of scientific research, experiment, Galileo Galilei, formulae, mathematical connections of physical values, mnenotechnical method, mathematical method***

APPLICAZIONE DEI MODELLI MATEMATICI NELLA METODOLOGIA DELLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI NUMERICI DI FISICA

R i a s s u n t o

Risolvere un esercizio proposto nel ambito delle materie scientifiche, significa, nella maggior parte dei casi ottenere un obiettivo sotto forma del risultato, di solito

numerico, a partire dai parametri proposti. Quando il problema proposto è di fisica si tratta di determinare i valori di una o più incognite in base ai valori predefiniti, oppure si trovano nel problema stesso. Il metodo descritto, come risoluzione nelle materie scientifiche era noto dai tempi di Galileo, che è stato il primo ad introdurre gli esperimenti nella metodologia della ricerca scientifica nella fisica. Però, nei problemi virtuali, come un esercizio descrittivo di cinematica, sa succedere che a studente sembra un problema irrisolvibile a causa della mancanza dei parametri d'ingresso. In questi casi si applicano i cosiddetti modelli matematici. Il modello matematico descritto è molto semplice, però può ingannare se si cerca di risolvere l'esercizio con la mnemotecnica.

Il metodo mnemotecnico è molto diffuso tra gli alunni e studenti con una preparazione scarsa. Consiste nel tentativo meccanico anzi mnemotecnico di trovare la formula che andrebbe incirca usata per l'esercizio. Nelle scienze sono molto più apprezzati modelli matematici che, in prima vista, non hanno niente a che fare con l'esercizio proposto (nel esempio descritto si arriva al fenomeno delle oscillazioni che con il treno non ha niente in comune), però producono un buon risultato.

I modelli matematici complessi e simulazioni matematiche, che riescono a risolvere solo i potenti calcolatori, si usano in fisica dell'atmosfera nella meteorologia sinottica per fare previsioni di tempo.

Parole chiavi: *problemi numerici nelle materie scientifiche, parametri o grandezze del problema proposto, metodologia della ricerca scientifica, esperimento, Galileo Galilei, formula, relazione matematica tra grandezze fisiche, metodo mnemotecnico, modello matematico*