Metodički obzori 2(2007)2
Stručni rad
Professional article
UDK: 514.1
Primljeno: 10. 11. 2006.

MALFATTIJEV PROBLEM

Dr. sc. Vladimir Kadum, prof. visoke škole
Odjel za obrazovanje učitelja i odgojitelja
Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli

Antonio Polo, prof.
Talijanska srednja škola u Rovinju

S a ž e t a k

U radu autori izlažu jedan način rješenja problema da se zadanom trokutu upišu tri kružnice koje se međusobno dotiču a svaka od njih dira po dvije stranice zadanog trokuta.

Zadatak je poznat pod nazivom *Malfattijev proble*.

Ključne riječi*:* *problem, trokut, upisati, kružnica, doticati, stranica*

Malfattijev[1] problem se sastoji u sljedećem:

Zadanom trokutu treba upisati tri kružnice koje se međusobno dotiču, i svaka od tih kružnica dotiče dvije stranice zadanog trokuta[2].

Neka je ABC zadani trokut (slika 1) sa stranicama a, b, c, opsega $2s$ i kutovima α, β i γ. Središta traženih kružnica su P, T, R, a polumjeri p, t, r. Nadalje, neka su dužine tangenata povučenih na njih u, v i w, tj. neka je

$$u = |AD| = |AM|,$$
$$v = |BE| = |BG|,$$
$$w = =|CI| = |CJ|.$$

Neka je S središte trokutu upisane kružnice, a ρ njen polumjer. Neka su, nadalje, x, y i z dužine tangenata povučenih iz vrhova na tu kružnicu, tj. neka je

$$x = |AF| = |AL|,$$
$$y = |BF| = |BH|,$$
$$z = |CH| = |CL|.$$

[1] Malfatti (1731 − 1807), talijanski matematičar.

[2] Ovaj problem je riješilo nekoliko matematičara. Jedan od njih je **Jakob Steiner** (1826). Rješenje koje ovdje izložemo dao je **Schellbach**, a objavljeno je u 45. svesku *Crellovog žurnala*.

Trokuti ADT i AFS su slični, $\Delta ADT \sim \Delta AFS$, pa iz te sličnosti slijedi da je

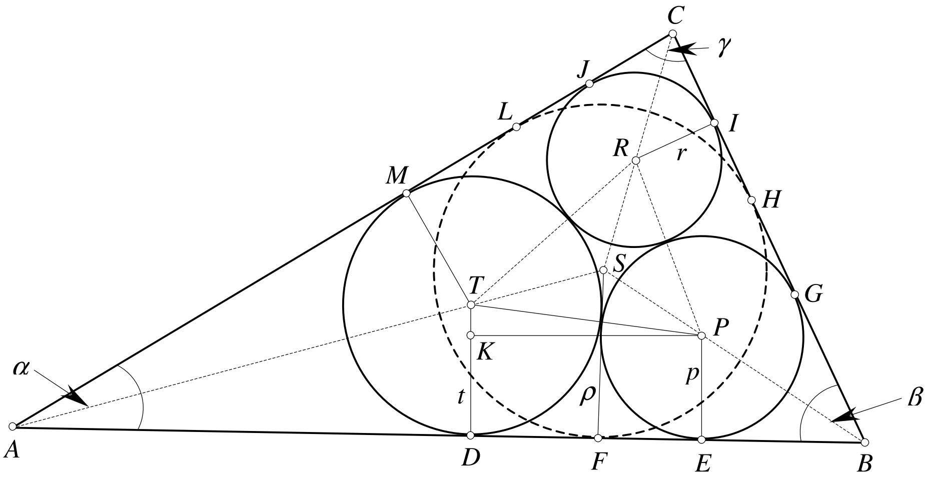
$$t : \rho = u : x,$$

odnosno

$$t = \frac{\rho\, u}{x}\,. \tag{1}$$

Sličnim zaključivanjem nalazimo da je

$$p = \frac{\rho\, v}{y}\,. \tag{2}$$



Slika 1.

Dirališta Malfattijevih kružnica sa stranicom c označimo sa D i E. Izračunajmo udaljenost tih dvaju dirališta, tj. nađimo

$$d = |DE|\,.$$

Iz pravokutnog trokuta KPT, primjenom Pitagorina poučka, slijedi

$$|PT|^2 = |TK|^2 + |KP|^2,$$

odnosno

$$(t+p)^2 = (t-p)^2 + d^2\,.$$

Iz posljednje relacije slijedi da je

$$d = 2\sqrt{p\,t}\,.$$

Ako u posljednju relaciju uvrstimo vrijednosti za p i t, tj. izraze (1) i (2), slijedi

$$d = 2\sqrt{\frac{\rho^2 u v}{x y}},$$

odnosno, u drugačijem zapisu

$$d = 2\sqrt{u v} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2}{xy}}.$$

Budući da je[3] $\rho^2 = \frac{x y z}{s}$, to zamjenom u posljednju relaciju daje

$$d = 2\sqrt{u v} \cdot \sqrt{\frac{xyz}{sxy}} = 2\sqrt{uv} \cdot \sqrt{\frac{z}{s}}.$$

Dakle je

$$c = u + v + 2\sqrt{uv} \cdot \sqrt{\frac{z}{s}}. \tag{3}$$

Sličnim zaključivanjem nalazimo da je

---

[3] Pokazat ćemo kako se dolazi do relacije $\rho^2 = \frac{x y z}{s}$. Iz slike 1 vidimo da je

$$|AF| + |FB| = c,$$
$$|BH| + |HC| = a,$$
$$|AL| + |LC| = b.$$

Odavde slijedi da je

$$|AF| = s - |BC|, \quad |BH| = s - |AC|, \quad |CL| = s - |AB|, \tag{*}$$

gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ i $|AF| = x$, $|BH| = y$, $|CL| = z$.

Površina trokuta, kojem su poznate sve tri stranice a, b, c računa se pomoću Heronove formule

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Površina trokuta može se izračunati i primjenom formule

$$P = s\,\rho,$$

gdje je ρ polumjer upisane kružnice, a s poluopseg danog trokuta. Sada, iz ovih dviju formula za površinu trokuta, slijedi $s\rho = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, odnosno, nakon kvadriranja

$$s^2\rho^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

pa zbog (*) možemo pisati

$$s^2\rho^2 = s\,x\,y\,z.$$

Odavde slijedi da je $\rho^2 = \frac{x y z}{s}$ do čega je valjalo doći.

$$\begin{aligned} a &= v + w + 2\sqrt{vw} \cdot \sqrt{\frac{x}{s}} \\ b &= u + w + 2\sqrt{uw} \cdot \sqrt{\frac{y}{s}} \end{aligned} . \tag{3}$$

Uzmemo li $s = 1$, tj. da polovica opsega bude jednaka jedinici, tada su veličine a, b, c te u, v, w pravi razlomci. To pak znači da se mogu izraziti kao kvadrati sinusa od šest pomoćnih kutova λ, μ, ν, φ, ψ i ξ

$$a = sin^2\lambda, \quad b = sin^2\mu, \quad c = sin^2\nu,$$
$$u = sin^2\varphi, \quad v = sin^2\psi, \quad w = sin^2\xi.$$

Iz relacija

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c,$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, slijedi

$$x = 1 - a, \quad y = 1 - b, \quad z = 1 - c,$$

pa je

$$cos^2\lambda = 1 - sin^2\lambda = 1 - a = x$$

i dalje

$$cos^2\mu = y, \quad cos^2\nu = z.$$

Sada relacije (3) poprimaju sljedeći oblik

$$\begin{aligned} &sin^2\varphi + sin^2\xi + 2\,sin\,\varphi\,sin\,\xi\,cos\,\lambda = sin^2\lambda, \\ &sin^2\psi + sin^2\xi + 2\,sin\,\psi\,sin\,\xi\,cos\,\mu = sin^2\mu, \\ &sin^2\psi + sin^2\varphi + 2\,sin\,\psi\,sin\,\varphi\,cos\,\nu = sin^2\nu. \end{aligned} \tag{4}$$

Da objasnimo značenje ovih relacija, nacrtat ćemo trokut KLM s unutarnjim kutovima φ i ξ, i λ kao vanjskim kutom na trećem vrhu (slika 2); dakle je $\varphi + \xi = \lambda$.

Uzmemo li da je promjer opisane kružnice tomu trokuta $2r = 1$, nalazimo da su duljine stranica toga trokuta

$$|KL| = sin\,(180° - \lambda) = sin\,\lambda, \quad |LM| = sin\,\varphi, \quad |MK| = sin\,\xi.$$

Primjenom kosinusova poučka na trokut KLM nalazimo da je

$$|KL|^2 = |KM|^2 + |LM|^2 - 2|KM| \cdot |LM| \cdot cos(180^o - \lambda),$$

odnosno

$$sin^2\lambda = sin^2\xi + sin^2\varphi + 2sin\,\xi\,sin\,\varphi\,cos\,\xi.$$

Dobili smo prvu relaciju u (4).

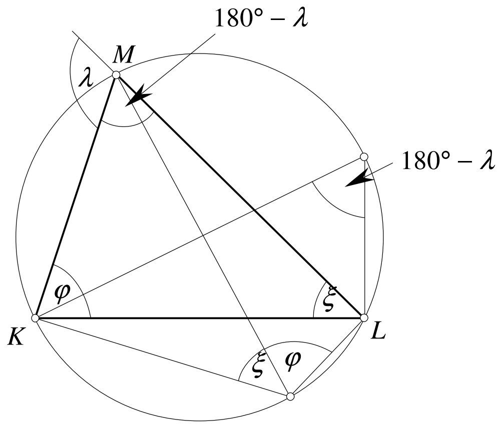
Sličnim zaključivanjem mogu se naći preostale dvije relacije u (4).

Odavde se zaključuje da nam izrazi (4) daju sljedeće relacije

$$\varphi + \xi = \lambda, \quad \xi + \psi = \mu, \quad \psi + \varphi = \nu.$$

Uzmemo li da je $\sigma = \dfrac{\lambda + \mu + \nu}{2}$, tada iz toga slijedi

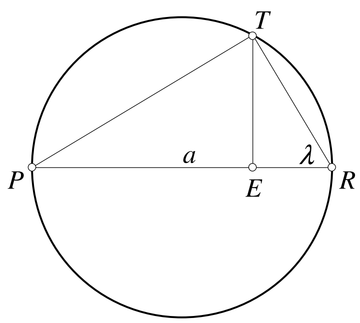
$$\varphi = \sigma - \mu, \quad \psi = \sigma - \lambda, \quad \xi = \sigma - \nu.$$



Slika 2.

Provedenim razmatranjem došli smo do toga kako se dani (Malfattijev) problem može riješiti. Konstrukcija se izvodi na sljedeći način:

Nacrtamo tri kuta λ, μ, ν kojih su kvadrati sinusa jednaki duljinama stranica zadanog trokuta. Pritom se uzima (pretpostavlja) da je $s = 1$. Činimo to ovako:



Slika 3.

Na promjeru $|PR| = s = 1$ kružnice nanesemo dužinu $\overline{PE} = a$ (slika 3). U točki E povučemo okomicu koja siječe kružnicu u točki T. Kako je

$$sin^2 \lambda = \frac{|ET|^2}{|TR|^2},$$

slijedi da je kut $PRT = \lambda$. Primjenom poučka za razmjernost pravokutnog trokuta imamo da je

$$sin^2 \lambda = \frac{|PE| \cdot |ER|}{|PR| \cdot |ER|} = |PE| = a \,.$$

Sličnim zaključivanjem nalazimo da je

$$sin^2 \mu = b \,, \quad sin^2 \nu = c \,.$$

Konstruiramo dalje

$$\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2}, \quad \psi = \sigma - \lambda, \quad \varphi = \sigma - \mu, \quad \xi = \sigma - \nu.$$

Sada na isti način možemo konstruirati

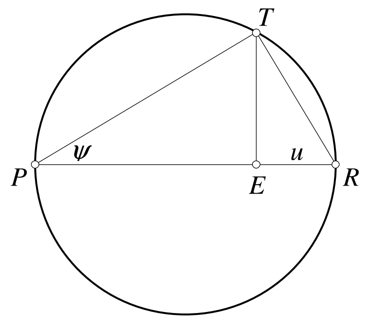
$$sin^2 \psi = u, \quad sin^2 \varphi = v, \quad sin^2 \xi = w$$

(slika 4). Naime, znamo li kut ψ, tada je

$$sin^2 \psi = \frac{|ET|^2}{|PT|^2} = \frac{|PE| \cdot |ER|}{|PR| \cdot |PE|} = |ER| = u \,.$$

Sličnim zaključivanjem nalazimo da je

$$sin^2 \varphi = v, \quad sin^2 \xi = w.$$



Slika 4.

Dobili smo dužine tangente koje su iz vrhova A, B i C povučene na Malfattijeve kružnice.

Dalje je jednostavno. Počevši od vrha A trokuta ABC na stranice c i b nanesemo dužinu u i dobivamo točke D i M. U točki D povučemo okomicu na stranicu c a u točki M okomicu na stranicu b. Te okomice sijeku se u točki T koja je središte jedne od tri Malfattijeve kružnice.

Sličnim postupkom nalazimo središta preostalih dviju kružnica.

Time je Malfattijev problem riješen.

MALFATTI'S PROBLEM

S u m m a r y

In the work the authors describe one of the possibilities of solving the problem to draw within a given triangle three circles that touch each other and each of them touching two sides of the given triangle

The problem is known as the Malfatti's problem.

Key words:*: problem, triangle, to draw, circle, touch, side*

PROBLEMA DI MALFATTI

R i a s s u n t o

Gli autori indicano una possibile risoluzione del problema che si riconduce all'inscrizione di tre cerchi in un triangolo qualunque, in modo che ciascun cerchio sia tangente agli altri due ed a due lati del triangolo

Questo esercizio è noto come Problema di Malfatti.

Parole chiavi: *problema, triangolo, circonferenza, tangente, lato.*