Zlatan Kulenović *
Neven Ninić **
Marijo Oršulić ***

ISSN (0469-6255)
(101-104)

NOVA METODA RJEŠAVANJA JEDNADŽBI GIBANJA KRIVULJNIH MEHANIZAMA

A NEW METHOD FOR SOLVING EQUATIONS OF MOTION OF CAM MECHANISMS

UDK 531.32/.33
Stručni članak
Proffesional paper

Sažetak

Važni sastavni dijelovi prijenosnih mehanizama suvremenih brodskih glavnih i pomoćnih strojeva, uređaja i instrumenata, jesu krivuljni mehanizmi. U ovom je radu predložena i opisana nova metoda rješavanja diferencijalne jednadžbe gibanja krivuljnih mehanizama s rotacijskim gibanjem članova. Dinamička je zadaća riješena primjenom jednostavnih analitičkih izraza i grafičkih konstrukcija, a kao rezultat dobivena je promjena reduciranog momenta na radni član u jednom ciklusu gibanja mehanizma. Pokazana je i istaknuta opravdanost primjene predložene metode u dinamičkoj analizi ovakvih tipova krivuljnih mehanizama.

Ključne riječi: krivuljni mehanizam, jednadžba gibanja, reducirani moment

Summary

The important components of transmitting mechanisms of the marine main and auxiliary machinery, devices and instruments, are the cam mechanisms. This paper proposes and describes a new method for solving the differential equation of motion of the cam mechanisms with rotating members. The dynamic problem is solved by the application of simple analytical expressions and graphical constructions, and the result is the change of reduced moment in one cycle of motion. The justified application of proposed method in the dynamic analysis of these cam mechanism types is shown and emphasized.

Key words: cam mechanism, equation of motion, reduced moment

* Dr. sci. Zlatan Kulenović
Visoka pomorska škola u Splitu
** Dr. sci. Neven Ninić
Visoka pomorska škola u Splitu
*** Dr. sci. Marijo Oršulić
Visoka pomorska škola u Splitu

1. Uvod
Introduction

Odvijanje složenih radnih i pomoćnih procesa svojstvo je suvremenih brodskih strojeva, uređaja i instrumenata najrazličitije namjene. Valjanost izvođenja pojedinih dijelova tih procesa bitno ovisi o traženim zakonitostima gibanja članova njihovih kinematičkih lanaca, odnosno potrebne pretvorbe oblika gibanja između članova. Ovi se zahtjevi ostvaruju različitim tipovima prijenosnih mehanizama, od kojih zbog svojih dobrih svojstava (mali broj članova, male dimenzije, jednostavna kinematička i dinamička sinteza, jednostavna tehnološka izradba itd.), krivuljni mehanizmi zasigurno imaju primarnu ulogu [1, 3, 5, 7, 9, 10]. Poznavanje svih sila i momenata koji djeluju na članove krivuljnih mehanizama tijekom gibanja, osobito je važno za njihovo pravilno oblikovanje. Izbor takvoga zakona gibanja pogonskog člana koji uz poznate zakone promjene sila i momenata otpora osigurava potrebnu zakonitost promjene sila i momenata u članovima mehanizma, s ciljem postizanja njihove neophodne čvrstoće, krutosti i otpornosti na trošenje, važna je inženjerska zadaća.

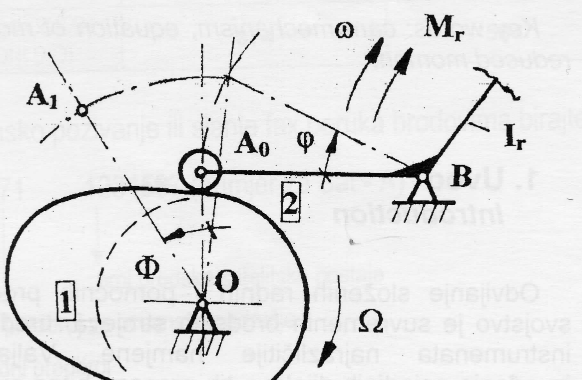
U ovom je radu predložena i opisana jedna nova metoda za rješavanje diferencijalne jednadžbe gibanja krivuljnih mehanizama, čiji članovi izvode rotacijsko gibanje. Metoda se temelji na primjeni jednostavnih analitičkih i grafičkih operacija s malim brojem međukoraka, a kao rezultat dobivena je promjena reduciranog momenta na radni član u jednom ciklusu gibanja mehanizma.

2. Dinamička analiza
Dinamic analysis

Za ravninski mehanizam s jednim stupnjem slobode gibanja, krutim članovima te rotacijskim (oscilatornim) gibanjem radnog člana 2 kao člana redukcije, slika 1., zakon kinetičke energije u diferencijalnom obliku glasi:

$$\mathrm{dE_K} = \mathrm{M_r d}\varphi \tag{1}$$

gdje je: $\mathrm{dE_K}$ - diferencijal kinetičke energije člana redukcije, $\mathrm{M_r}$ - reducirani moment (pogonske i otporne sile i momenti), $\mathrm{d}\varphi$ - diferencijal kuta zakreta člana redukcije.



Slika 1. Krivuljni mehanizam
Figure 1. Cam mechanism

Fazu stacionarnog gibanja mehanizma karakterizira periodičnost promjene kinematičkih i dinamičkih veličina bitnih za definiranje gibanja.

Promatranjem jednog perioda takvoga gibanja između dva bliska položaja 0 i 1, a nakon integriranja izraza (1), slijedi:

$$\int_{E_{K0}}^{E_{K1}} \mathrm{dE_K} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mathrm{M_r d}\varphi \tag{2}$$

ili

$$\mathrm{I_{r1}}\omega_1^2 - \mathrm{I_{r0}}\omega_0^2 = 2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mathrm{M_r d}\varphi \tag{3}$$

gdje je: $\mathrm{I_r}$ - reducirani moment tromosti

$$\mathrm{I_r} = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{I_{Ci}}\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2 + \mathrm{m_i}\left(\frac{\mathrm{v_{Ci}}}{\omega}\right)^2\right] \tag{4}$$

$\mathrm{I_{Ci}}$ - moment tromosti i-tog člana mehanizma za os kroz središte njegove mase, ω_i - kutna brzina i-tog člana mehanizma, ω - kutna brzina člana redukcije, $\mathrm{m_i}$ - masa i-tog člana mehanizma, $\mathrm{v_{Ci}}$ - brzina središta mase i-tog člana mehanizma, n - broj svih članova mehanizma u kinematičkom lancu.

Izraz (4) pokazuje da reducirani moment tromosti ne ovisi o zakonu gibanja mehanizma, nego samo o masi članova i omjera brzina (prijenosnog omjera), koji opet ovisi o položaju članova. Na osnovi toga moguće je ustvrditi da je reducirani moment tromosti funkcija samo kuta zakreta radnog člana 2, tj. $\mathrm{I_r} = \mathrm{I_r}(\varphi)$. Međutim, reducirani moment je u općem slučaju funkcija kuta zakreta, kutne brzine i vremena gibanja člana 2, odnosno $\mathrm{M_r} = \mathrm{M_r}(\varphi, \omega, \mathrm{t})$ [1, 2, 8, 10].

Na osnovi izraza (3), kutna brzina člana redukcije na kraju promatranog perioda gibanja je:

$$\omega_1 = \left[\frac{\mathrm{I_{r0}}}{\mathrm{I_{r1}}}\omega_0^{\,2} + \frac{2}{\mathrm{I_{r1}}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mathrm{M_r d}\varphi\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Ako radni član ima očekivani zastoj u gibanju, položaj 0 se može uzeti za početni položaj nakon mirovanja, pa je $\varphi_0 = 0$ i $\omega_0 = 0$. Uvodeći oznake $\varphi_1 = \varphi$, $\omega_1 = \omega$ i $\mathrm{I_{r1}} = \mathrm{I_r}$, izraz (5) dobiva oblik:

$$\omega = \left[\frac{2}{\mathrm{I_r}}\int_{0}^{\varphi} \mathrm{M_r d}\varphi\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Potrebni zakon promjene reduciranog momenta na radni član 2, moguće je zadati u obliku elementarnih funkcija ili njihovih kombinacija, pa se predlaže zapis toga zakona na sljedeći način:

$$\mathrm{M_r} = \mathrm{M_{max}} \cdot \mathrm{m_i} \tag{7}$$

gdje je: M_{max} - nepoznata veličina maksimalnog reduciranog momenta,

$m_i = m_i(\varphi, \omega, t)$ - momentna funkcija koja odgovara razmatranom periodu gibanja (i = 1, 2, 3, ...).

Uvrštavanjem izraza (6) u izraz (7), slijedi:

$$\omega = K \cdot (2M_{max})^{\frac{1}{2}} \qquad (8)$$

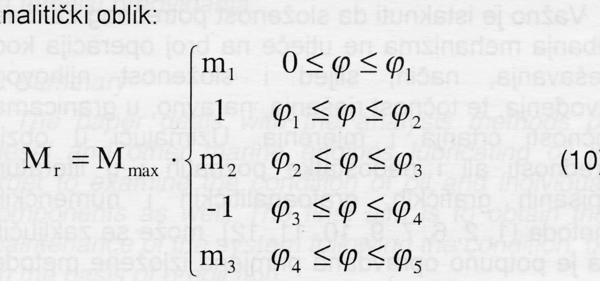
gdje je:

$$K = \left(\frac{1}{I_r} \int_0^{\varphi} m_i \, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

Promjena oblika profila pogonskog člana 1 (grebena), izravno utječe na zakon promjene sila i momenata koji djeluju na članove mehanizma tijekom gibanja [3, 4, 7, 10]. U promatranom se slučaju pretpostavlja da potrebni zakon promjene reduciranog momenta na član 2, s obzirom na tražene uvjete rada prijenosnog mehanizma [3], ima analitički oblik:

$$M_r = M_{max} \begin{cases} m_1 & 0 \le \varphi \le \varphi_1 \\ 1 & \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ m_2 & \varphi_2 \le \varphi \le \varphi_3 \\ 1 & \varphi_3 \le \varphi \le \varphi_4 \\ m_3 & \varphi_4 \le \varphi \le \varphi_5 \end{cases} \qquad (10)$$

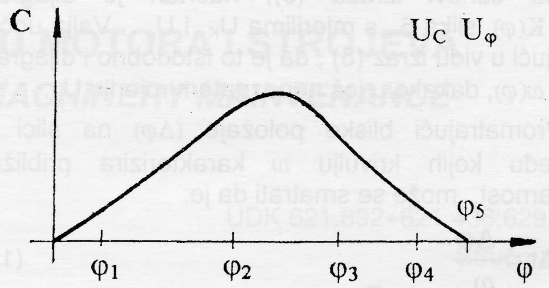
U ovom su izrazu momentne funkcije $m_i = m_i(\varphi)$, (i = 1, 2, 3), odgovarajuće elementarne trigonometrijske funkcije primjerene bezudarnom radu krivuljnog mehanizma [1, 7, 9, 10]. Grafički prikaz izraza (10), dan je na slici 2. Dijagram $M_r = M_r(\varphi)$, nacrtan je u odgovarajućim mjerilima U_m i U_φ



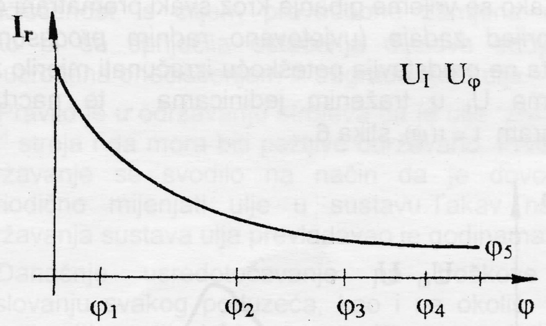
Slika 2. Reducirani moment $M_r = M_r(\varphi)$
Figure 2. Reduced moment $M_r = M_r(\varphi)$

Nakon grafičkog integriranja ovoga dijagrama, dobiva se dijagram $C = C(\varphi)$, slika 3, gdje je:

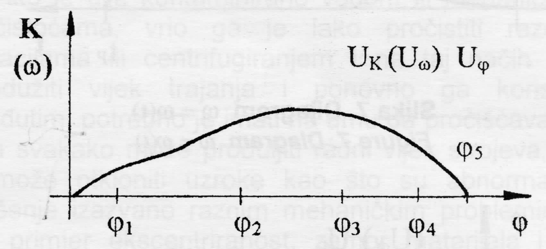
$$C = \int_0^{\varphi} m_i \, d\varphi \qquad (11)$$



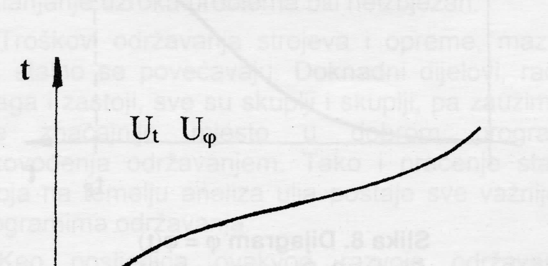
Slika 3. Dijagram $C = C(\varphi)$
Figure 3. Diagram $C = C(\varphi)$



Slika 4. Dijagram $I_r = I_r(\varphi)$
Figure 4. Diagram $I_r = I_r(\varphi)$



Slika 5. Dijagram $K = K(\varphi)$
Figure 5. Diagram $K = K(\varphi)$



Slika 6. Dijagram $t = t(\varphi)$
Figure 6. Diagram $t = t(\varphi)$

Pomoću izraza (4), a na osnovi poznatog oblika, dimenzija, masa i položaja članova u kinematičkom lancu, određuju se veličine reduciranog momenta tromosti na radni član 2 u promatranom periodu gibanja mehanizma. Dijagram $I_r = I_r(\varphi)$ nacrtan je u mjerilima U_I i U_φ, što je pokazano na slici 4.

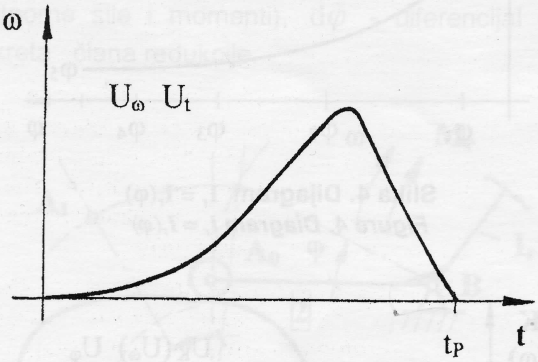
Na osnovi izraza (9), nacrtan je dijagram $K = K(\varphi)$, slika 5., s mjerilima U_K i U_φ . Valja uočiti, imajući u vidu izraz (8) , da je to istodobno i dijagram $\omega = \omega(\varphi)$, dakako u još nepoznatom mjerilu U_ω.

Promatrajući bliske položaje $(\Delta\varphi)$ na slici 5, između kojih krivulju ω karakterizira približna linearnost, može se smatrati da je:

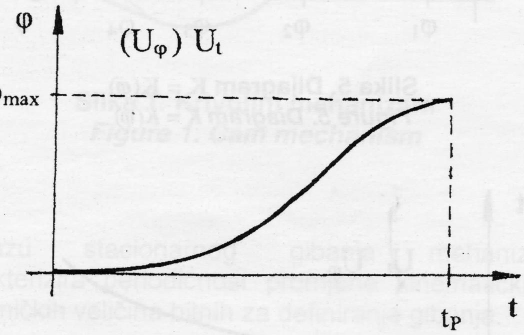
$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{sr}} \tag{12}$$

gdje je: Δt – vrijeme gibanja radnog člana 2 kroz promatrani dio, ω_{sr} – srednja kutna brzina radnog člana 2 na tom dijelu.

Kako se vrijeme gibanja kroz svaki promatrani dio unaprijed zadaje (uvjetovano radnim procesom), doista ne predstavlja poteškoću izračunati mjerilo za vrijeme U_t u traženim jedinicama , te nacrtati dijagram $t = t(\varphi)$, slika 6.



Slika 7. Dijagram $\omega = \omega(t)$
Figure 7. Diagram $\omega = \omega(t)$



Slika 8. Dijagram $\varphi = \varphi(t)$
Figure 8. Diagram $\varphi = \varphi(t)$

Na osnovi dijagrama prikazanih na slici 5. i slici 6., primjenom metode isključenja parametra φ, dobiva se dijagram $\omega = \omega(t)$ u nepoznatom mjerilu U_ω, slika 7. Vrijeme gibanja t_P u jednom ciklusu promatranog gibanja, poznato je.

Grafičkim integriranjem krivulje $\omega = \omega(t)$, dobiva se krivulja $\varphi = \varphi(t)$, slika 8. Budući da je veličina maksimalnog kuta zakreta radnog člana 2 (kut hoda φ_{max}) poznata, moguće je odrediti mjerilo dijagrama U_φ. Na osnovi mjerila U_φ i U_t, izračunava se nepoznato mjerilo U_ω dijagrama koji je prikazan na slici 7.

Veličina maksimalnog reduciranog momenta, na osnovi izraza (8), iznosi:

$$M_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{K}\right)^2 \tag{13}$$

Veličinu reduciranog momenta M_r u bilo kojem položaju radnog člana 2 tijekom jednog ciklusa gibanja mehanizma, slika 2., sada je lako dobiti na osnovi izraza (7), čime je postavljena dinamička zadaća riješena.

3. Zaključak/*Conclusion*

Predloženu i opisanu novu metodu rješavanja diferencijalnih jednadžbi gibanja krivuljnih mehanizama s rotacijskim gibanjem članova, karakteriziraju jednostavni analitički izrazi i grafičke konstrukcije s malim brojem međukoraka.

Važno je istaknuti da složenost potrebnog zakona gibanja mehanizma ne utječe na broj operacija kod rješavanja, način, slijed i složenost njihovog izvođenja, te točnost rješenja, naravno, u granicama točnosti crtanja i mjerenja. Uzimajući u obzir prednosti ali i nedostatke poznatih i u literaturi opisanih grafičkih, grafoanalitičkih i numeričkih metoda [1, 2, 6, 7, 9, 10, 11, 12], može se zaključiti da je potpuno opravdana primjena izložene metode pri rješavanju dinamičkih zadaća promatranih tipova krivuljnih mehanizama u inženjerskoj praksi.

Literatura/*References*

[1] Dresig, H., Vulfson, I.I., Dynamik der Mechanismen, Springer Verlag, Wien, 1989.

[2] Komarov, M.S., Dinamika mehanizmov i mašin, Mašinostroenie, Moskva, 1989.

[3] Kulenović, Z., Jedan novi metod za određivanje sila u krivuljnim mehanizmima, Zbornik radova 4. Simpozijuma teorijske i primijenjene mehanike, Ohrid, 1991., str. 41-46.

[4] Lohse, P., Getriebe-syntese, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[5] Muftić, O., Drača, K., Uvod u teoriju mehanizama, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1974.

[6] Parviz, E.N., Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice Hall, New Jersey, 1988.

[7] Popov, N.N., Rasčet i projektirovanie kulačkovih mehanizmov, Mašinostroenie, Moskva, 1980.

[8] Shingley, J.E., Uicker, J.J.: Theory of Machines and Mechanisms, McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

[9] Soni, A.H., Mechanisms Synthesis and Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

[10] Volmer, J., Getriebetechnik, Kurvengetriebe, VEB Verlag Technik, Berlin,1989.

[11] Devoino, G.N., Kursovoe proektirovanie po teorii mehanizmov i mašin, Višeišaja škola, Minsk, 1986.

[12] Hamilton, H.M., Ocvirk F.W., Mechanisms and Dynamics of Machinery, John Wiley and Sons, New York, 1973.

Rukopis primljen:11.7.2000.