

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \text{ gdje su:}$$

x_{ij} - količina robe na pojedinim relacijama (od nekog ishodišta i do nekog odredišta j)

c_{ij} - troškovi po jedinici tereta na relaciji i - j

Metode kojima se postiže tražena vrijednost funkcija cilja (minimizacija troškova) uz ograničenja koja će kasnije biti objašnjena, jesu dvojake:

- metode koje traže postavljanje početnog programa koji se zatim poboljšava tako dugo dok se ne iscrpe sve rezerve,

- metode koje u traženju optimuma ne zahtijevaju postavljanje početnog programa.

Najpoznatije metode kojima se postavlja početni program transporta jesu:

- metoda sjeverozapadnog kuta,
- metoda najmanjih troškova,
- Vogelova aproksimativna metoda,
- metoda dvojnog prvenstva.

Najpoznatije metode (s) kojima se testira početni program i traži konačno rješenje transportnog problema između ostalih jesu metoda relativnih troškova i MODI metoda.

2.2. Linearna ograničenja (*Linear limitations*)

Po pretpostavci, linearna ograničenja su uvjeti pod kojima se promatrani problem odvija. Kod transportnog problema to su količine robe koje ishodišta mogu isporučiti i količine te iste robe koju odredišta mogu primiti. U slučaju kada bi se suma količina neke robe iz svih odredišta poklopila sa sumom količina neke robe iz svih ishodišta, dobiva se zatvoreni transportni problem koji u matematičkoj notaciji glasi:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

uz ograničenja:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Kada ne postoji ravnoteža između ukupnih količina neke robe ishodišta i odredišta, javlja se otvoreni transportni problem sa suviškom u otpremi, gdje je vidljivo da postoji:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

a model se u tom slučaju može notirati:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} < a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0$$

ili otvoreni transportni problem sa suviškom u primanju gdje postoji relacija:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

a model se može notirati uobičajnim simbolima:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} < b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Da bi se otvoreni transportni problem mogao riješiti, potrebno ga je svesti na zatvoreni problem otvaranjem fiktivnog odredišta ili ishodišta (ovisno o tome je li veća potražnja ili ponuda neke robe). Od ograničenja jedno proizlazi iz same prirode problema, a to je da sve količine prijevoza moraju biti nenegativne.

2.3. Koeficijenti funkcije cilja

(*The coefficients of the aim function*)

Koeficijenti funkcije cilja su ponderi uz pojedine količine prijevoza. To su ustvari troškovi prijevoza po jedinici tereta na pojedinim relacijama (c_{ij}). Da bi se dobila vrijednost funkcije cilja neke kombinacije (interacije) nakon primjene metode za rješavanje transportnog problema, množe se koeficijenti c_{ij} (troškovi) s količinama prijevoza po pojedinim relacijama, x_{ij} .

3. Praktična primjena programa transportnog problema

Practical application of the programme of transport problem

“Transportni problem” linearnog programiranja može se u praksi primjeniti na različita područja. Izrazito pogodno područje za primjenu je područje prometa i problemi vezani uz promet. To, međutim, ne znači da se ne mogu primjenjivati i u mnogim drugim situacijama. Rezultat te primjene jesu optimalan raspored transportnih sredstava na pojedine relacije, minimiziranje vremena transporta, optimalan raspored tereta koji se prevozi između pojedinih lokacija, pravilan izbor lokacije pogona i sl. Istakne li se cilj primjene, koji može biti dvojak, tj. maksimalan prihod ili minimalni troškovi (to je ujedno svrha i cilj poslovanja), opravdanost je tim veća. Konkretni primjeri tih primjena jesu:

- 1) U željezničkom prometu:
 - ekonomično iskorištavanje raznih vučenih vozila (tj. vagona) u zavisnosti od vrste roba koje se prevoze,
 - racionalno korištenje raznih vučnih vozila (tj. lokomotiva) po pojedinim relacijama,
 - prijevoz robe uz minimalne transportne troškove;
- 2) U zračnom prometu određivanje pravilnog rasporeda zrakoplova na pojedine
- 3) relacije s obzirom na prijevoz robe i putnika;
- 4) U cestovnom prometu:
 - raspored teretnih (i putničkih) vozila na pojedine relacije,
 - određivanje količina neke robe na pojedinim relacijama uz minimalne troškove prijevoza;
- 5) U pomorskom prometu:
 - raspored teretnih (i putničkih) brodova na pojedine relacije,
 - ekonomično iskorištavanje raznih tipova kontejnera u zavisnosti od vrste roba koja se prevoze,
 - prijevoz praznih kontejnera uz minimalne transportne troškove i sl.

4. Kontejnerizacija i transport

Containerization and transport

Kontejnerizacija u uvjetima suvremene proizvodnje, tržišne ekonomije i međunarodne razmjene ima izuzetno veliko značenje. Kontejnerizacija u pomorskom transportu započinja 1955. godine kada

”Sealand”, američka tvrtka, organizira kontejnerski servis na relaciji New York - Puerto Rico, odnosno kada brod ”Fairland”, iste kompanije, godine 1966. s teretom isključivo s kontejnerima uplovljava u luku Brementhaven. Nedugo zatim otvaraju se kontejnerske linije sa Zapadnom Europom, odnosno s Japanom, Engleskom itd. Prvi kontejnerski brod u našem brodarstvu ”Pionir”, kapaciteta 304 kontejnera TEU, zaplovio je 1973. godine, znači 18 godina kasnije nego prvi kontejnerski brod na Atlantiku.¹

Prednosti ove moderne tehnologije transporta uvjetovale su razvoj kontejnera, te danas svjetski park raspolaže s više od desetak milijuna različitih tipova kontejnera, kojima se godišnje preveze oko pet milijardi tona tereta, čija vrijednost dostiže oko dvadeset milijardi USD².

U cijeni koštanja proizvoda značajnu stavku zauzima i cijena transporta. Danas s razvojem informatičke tehnologije uz primjenu matematičkih modela optimizacije moguće je ovaj problem optimizirati.

Da bi se optimiziralo kretanje kontejnera potrebno je idealizirati problem i pronaći odgovarajuću metodu optimizacije. Odabran je opći transportni problem u linearnoj formi, jer su unaprijed dati određeni uvjeti koje treba zadovoljavati, a prilično je lako odrediti i funkciju cilja koja u ovom slučaju predstavlja ukupne troškove transporta kontejnera.

Kretanje kontejnera treba promatrati kroz mrežu koja ima ishodišta (ponudu kontejnera) i odredišta (potražnju za kontejnerima). Ovaj rad obrađuje kretanje kontejnera između 7 ishodišta i 4 odredišta. Ponuda kontejnera i potražnja za kontejnerima, te troškovi prijevoza po pojedinim relacijama dani su u tablici 1.

Tablica 1: Troškovi prijevoza kontejnera u USD/jed. kontejnera

Container transport expenses in US \$/TEU

Ishodište kontejnera	Odredišta kontejnera				Kapaciteti ishodišta u TEU
	ODR1	ODR2	ODR3	ODR4	
ISH1	42	38	51	82	325
ISH2	35	28	53	47	243
ISH3	56	39	48	36	482
ISH4	63	32	55	49	156
ISH5	51	64	48	37	517
ISH6	85	56	32	73	282
ISH7	67	55	42	79	115
Kapaciteti odredišta u TEU	653	526	372	519	

1 Marković, I.: Nova tehnologija transporta, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 1985, str. 98.

2 Zelenika, R.: Suvremeni transportni sustavi, Ekonomski fakultet Rijeka, Rijeka, 1995, str. 163

Iz tablice se vidi da će matrica modela imati 7 redova (7 ishodišta) i 4 stupca (4 odredišta). Dakle $m=7$ i $n=4$. Prema tablici 1 jednadžbe ograničenja u modelu (kapaciteti ishodišta i odredišta) glase:

- kapaciteti ishodišta kontejnera:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 325$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 243$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 482$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 156$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 517$$

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} = 282$$

$$x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} = 115$$

- kapaciteti odredišta kontejnera:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 653$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} = 526$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} = 372$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} = 519$$

U praksi se nikad ne javlja slučaj da je ukupna ponuda jednaka ukupnoj potražnji za kontejnerima, pa je potrebno uvoditi i prividna ishodišta i odredišta. Ako je ukupna ponuda veća od potražnje, potrebno je uvesti prividno odredište čija je prividna potražnja jednaka razlici između ukupne ponude i ukupne potražnje, a jedinični troškovi transporta u to odredište iz svih ishodišta su jednaki nuli. Ako je ukupna potražnja veća od ukupne ponude uvodi se prividno ishodište kojih je prividna ponuda jednaka razlici između ukupne potražnje i ponude, a jedinični troškovi transporta iz tog ishodišta za sva odredišta su maksimalni.

5. Kompjutorsko rješenje transportnog problema

Transport problem - computer solution

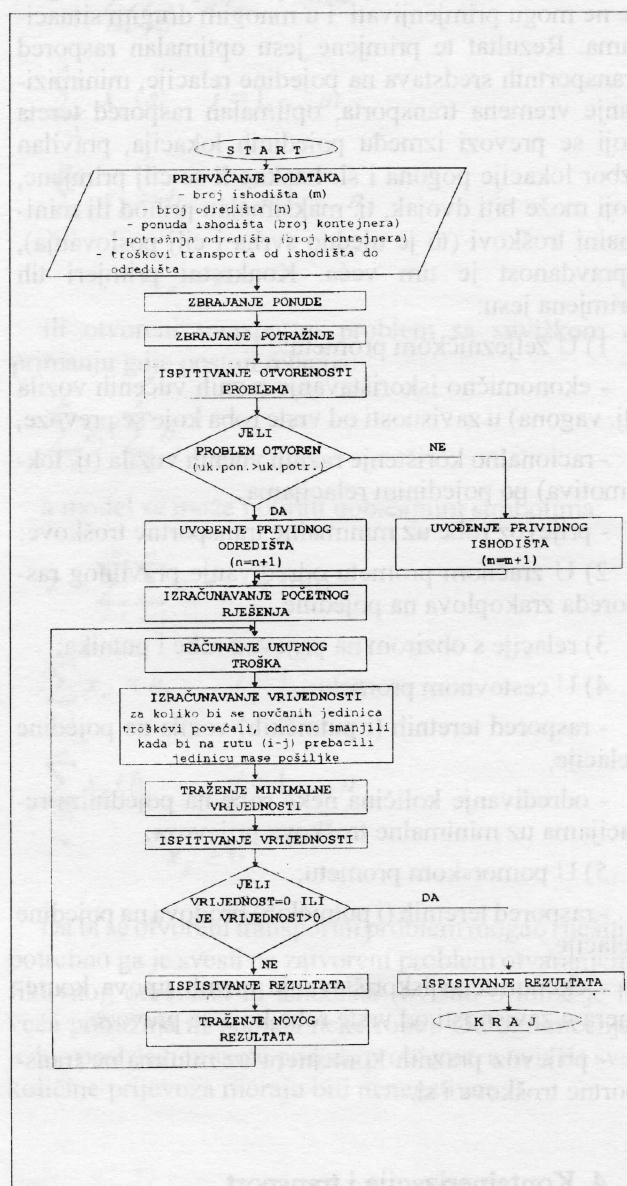
Pri praktičnom programiranju matematičkog modela izabrana je iterativna metoda "skakanja s kamena na kamen", koja u potpunosti odgovara kompjutorskom načinu rješavanja problema, gdje se i pored velikog broja potrebnih iteracija rješenje dobiva relativno brzo.

Nakon što je zadatak točno definiran, kao i svi zahtjevi u svezi s njim, može se prići njegovom oblikovanju za rješavanje pomoću kompjutera. U tu svrhu zadatak je potrebno prikazati u kodiranom obliku, tj. putem nekog programskog jezika. Radi lakšeg pisanja programa, a ujedno i zbog bolje preglednosti izrađuje se dijagram tijeka programa (cf. prilog 1.).

Takav dijagram tijeka programa omogućuje programiranje u svakom programskom jeziku, pa i u modernom "macro" jeziku npr. unutar integralnog business paketa QUATTRO PRO (ili sličnim tabličnim kalkulatorima: MS Excel, Lotus 123 itd.).

Prilog 1. Dijagram tijeka programa

Supplement 1. The diagram of the programme procedure



Naravno može se koristiti i neki od profesionalnih paketa za optimizaciju kao npr. LINDO (iz kojeg je priložen ispis odgovarajuće sintakse - cf. prilog 2.).

Prilog 2. Sintaksa za rješavanje transportnog problema i ispis konačnih vrijednosti u programu LINDO

Supplement 2. Syntax of the transport problem solution and the list of final values in "LINDO" programme

```

look all
MIN 42 X11 + 36 X12 + 51 X13 + 82 X14 + 35 X21 + 26 X22
+ 51 X23 + 47 X24 + 56 X31 + 49 X32 + 40 X33 + 36 X34
+ 63 X41 + 32 X42 + 55 X43 + 49 X44 + 51 X51 + 64 X52
+ 48 X53 + 37 X54 + 35 X61 + 59 X62 + 32 X63 + 73 X64
SUBJECT TO
2) X11 + X12 + X13 + X14 = 325
3) X21 + X22 + X23 + X24 = 243
4) X31 + X32 + X33 + X34 = 482
5) X41 + X42 + X43 + X44 = 326
6) X51 + X52 + X53 + X54 = 517
7) X61 + X62 + X63 + X64 = 262
8) X71 + X72 + X73 + X74 = 115
9) X11 + X21 + X31 + X41 + X51 + X61 + X71 = 653
10) X12 + X22 + X32 + X42 + X52 + X62 + X72 = 526
11) X13 + X23 + X33 + X43 + X53 + X63 + X73 = 372
12) X14 + X24 + X34 + X44 + X54 + X64 + X74 = 519
END

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGING:
VARIABLE CURRENT ALLOWABLE ALLOWABLE
RHS INCREASE DECREASE
X11 42.000000 0.000000 0.000000
X12 36.000000 INFINITY 7.000000
X13 51.000000 INFINITY 18.000000
X14 82.000000 INFINITY 54.000000
X21 35.000000 4.000000 INFINITY
X22 26.000000 INFINITY 4.000000
X23 51.000000 INFINITY 27.000000
X24 47.000000 INFINITY 26.000000
X31 56.000000 INFINITY 6.000000
X32 39.000000 4.000000 8.000000
X33 48.000000 INFINITY 7.000000
X34 36.000000 1.000000 4.000000
X41 63.000000 INFINITY 20.000000
X42 32.000000 8.000000 INFINITY
X43 55.000000 INFINITY 21.000000
X44 49.000000 INFINITY 20.000000
X51 37.000000 6.000000 4.000000
X52 59.000000 INFINITY 24.000000
X53 48.000000 INFINITY 6.000000
X54 37.000000 4.000000 1.000000
X61 35.000000 INFINITY 44.000000
X62 59.000000 INFINITY 26.000000
X63 32.000000 18.000000 INFINITY
X64 73.000000 INFINITY 46.000000
X71 47.000000 INFINITY 16.000000
X72 55.000000 INFINITY 15.000000
X73 42.000000 5.000000 10.000000
X74 73.000000 INFINITY 42.000000

RHS CURRENT RIGHTHAND SIDE RANGES
ALLOWABLE ALLOWABLE
INCREASE DECREASE
1 2120.000000 INFINITY 25.000000
2 2070.000000 85.000000 25.000000
3 482.000000 107.000000 25.000000
4 326.000000 370.000000 25.000000
5 517.000000 INFINITY 25.000000
6 262.000000 90.000000 25.000000
7 115.000000 653.000000 85.000000
8 526.000000 25.000000 370.000000
9 372.000000 25.000000 90.000000
10 519.000000 25.000000 407.000000

OBJ: OPTIMUM AT STEP 20
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1 77807.0000

VARIABLE VALUE REDUCED COST
X11 325.000000 0.000000
X12 0.000000 7.000000
X13 0.000000 18.000000
X14 0.000000 54.000000
X21 243.000000 0.000000
X22 0.000000 4.000000
X23 0.000000 27.000000
X24 0.000000 26.000000
X31 0.000000 6.000000
X32 0.000000 4.000000
X33 0.000000 7.000000
X34 0.000000 1.000000
X41 0.000000 20.000000
X42 0.000000 8.000000
X43 0.000000 21.000000
X44 0.000000 20.000000
X51 0.000000 6.000000
X52 0.000000 24.000000
X53 0.000000 6.000000
X54 0.000000 4.000000
X61 0.000000 44.000000
X62 0.000000 26.000000
X63 0.000000 18.000000
X64 0.000000 46.000000
X71 0.000000 16.000000
X72 0.000000 15.000000
X73 0.000000 5.000000
X74 0.000000 42.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES
2) 25.000000 0.000000
3) 0.000000 9.000000
4) 0.000000 18.000000
5) 0.000000 1.000000
6) 0.000000 4.000000
7) 25.000000 0.000000
8) 0.000000 10.000000
9) 0.000000 51.000000
10) 0.000000 40.000000
11) 0.000000 42.000000
12) 0.000000 37.000000

NO. ITERATIONS 20
DC RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS
? Y
    
```

6. Iznalaženje optimalnog programa transportnog problema

Finding out optimal transport problem programme

Rješavajući problem ispostavilo se da je ovaj transportni problem otvorenog tipa. Suma količina koje ishodište mogu dati veća je od sume količina koju odredišta mogu primiti, tj.

$$\sum_{i=1}^m a_i = 2120 \quad \sum_{j=1}^n b_j = 2070$$

$$i = 1, \dots, 7 \quad j = 1, \dots, 4$$

iz čega slijedi da je $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$

Tablica 2. Rezultati optimizacije transportnog problema

Table 2. The results of the transport problem optimisation

Ishodišta kontejnera	Odredišta kontejnera				Kapaciteti ishodišta u TEU
	ODR1	ODR2	ODR3	ODR4	
ISH1	325	0	0	0	325/372 (100%)
ISH2	243	0	0	0	243/243 (100%)
ISH3	0	370	0	112	482/482 (100%)
ISH4	0	156	0	0	156/156 (100%)
ISH5	85	0	0	407	492/517 (95.2%)
ISH6	0	0	282	0	282/282 (100%)
ISH7	0	0	90	0	90/115 (100%)
Kapaciteti odredišta u TEU	653 od 653 ili 100%	526 od 526 ili 100%	372 od 372 ili 100%	519 od 519 ili 100%	2070/2120 ili 97.6%
					2070/2070 ili 100%

Što znači da se:

- za odredište 1 dopremi:

325 kontejnera iz ishodišta 1,

243 kontejnera iz ishodišta 2,

85 kontejnera iz ishodišta 5;

- za odredište 2 dopremi:

370 kontejnera iz ishodišta 3,

156 kontejnera iz ishodišta 4;

- za odredište 3 dopremi:

282 kontejnera iz ishodišta 6,

90 kontejnera iz ishodišta 7;

- za odredište 4 dopremi:

112 kontejnera iz ishodišta 3,

407 kontejnera iz ishodišta 5;

U našem primjeru došlo se do optimalnog rješenja u trećoj iteraciji. Naravno svaka iteracija pokazala je određene uštede u transportu. Usporedimo li troškove prve iteracije (95.318 USD) s troškovima zadnje (treće) iteracije (77.807 USD) vidi se da je ostvarena ušteda od 17.511 USD.

Tablica 3. Optimalni troškovi prijevoza kontejnera u USD (ukupno po pravcima)

Optimal container transport expenses in US \$ (total, according to directions)

Ishodišta kontejnera	Odredišta kontejnera				Ukupni trošak po ishodištima u USD
	ODR1	ODR2	ODR3	ODR4	
ISH1	13.650	0	0	0	13.650
ISH2	8.505	0	0	0	8.505
ISH3	0	14.430	0	4.032	18.462
ISH4	0	4.990	0	0	4.992
ISH5	4.335	0	0	15.059	19.394
ISH6	0	0	9.024	0	9.024
ISH7	0	0	3.780	0	3.780
Ukupni trošak po odredištima u USD	26.490	19.422	372	19.091	77.807

Rukopis primljen: 11. 7. 1995.

ZAKLJUČAK CONCLUSION

Da bi se transportni problem mogao primjeniti u praksi, nužan je uvjet postojanje određenih podataka. To su podaci o kapacitetima ishodišta i odredišta, te podaci o troškovima prijevoza po jedinici transportirane robe (npr. TEU).

Kako takvi podaci u poduzeću postoje, tako se na njih mogu primjeniti suvremene znanstvene metode optimizacije. Te metode dovode do znatno nižih troškova. One uveliko olakšavaju operativno planiranje i donošenje pravodobnih i ispravnih odluka.

U ovom je radu obrađen pojednostavljen linearni transportni problem, koji ima sedam ishodišta i četiri odredišta. Međutim, metodama matematičkog programiranja, a posebno modernim kompjutorskim integriranim "what if" simulacijama mogu se vrlo brzo i pouzdano rješavati mnogo složeniji transportni problemi u međunarodnom i multinacionalnom transportu. U tomu transportu u pravilu, sudjeluje više grana prometa (najčešće : pomorski, željeznički, cestovni...), više suvremenih tehnologija transporta (npr. paletizacija, kontejnerizacija, RO-RO, LO-LO, RO-LO, FO-FO, HUCKEPACK i BIHODALNA tehnologija transporta), a složeni transportni lanci homogenog tereta mogu imati više desetaka ishodišta i odredišta na relaciji od sirovinске baze do potrošača.

LITERATURA

LITERATURE

1. Alpha, C. Chiang: Osnove metode matematičke ekonomije, prevod MATE d.o.o, Zagreb, 1984.
2. Marković, I.: Integralni transportni sustavi i robni tokovi, Fakultet prometnih znanosti Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1990.
3. Zelenika, R.: Suvremeni transportni sustavi, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 1995.

Summary

Transport problems in management of many companies are very explicit. Transport expenses are very high in total expenses of an item produced requiring that managers and experts should pay special attention to this problem.

This paper has elaborated systematically the procedure of solving complex transport problem, applying the method of linear programming which provides optimal transport chains i.e., minimize manipulation-transport expenses and maximize profit.