

# ODREĐIVANJE GEOGRAFSKIH KOORDINATA - na osnovi mjerenih kutova između nebeskih tijela i terestričkih objekata -

527.62

Izvorni znanstveni rad

## Sažetak

U članku je obrađena nova mogućnost određivanja geografskih koordinata na osnovi mjerenih kutova između nebeskih tijela i terestričkih objekata, bez obzira u kojoj se ravnini kutovi mjere. Istaknuta je mogućnost primjene metode na više načina: 1. mjerenjem kutova između jednog nebeskog tijela i više terestričkih objekata, 2. mjerenjem kutova između više nebeskih tijela i jednog terestričkog objekta i 3. mjerenjem kutova između više nebeskih tijela i više terestričkih objekata.

## UVOD

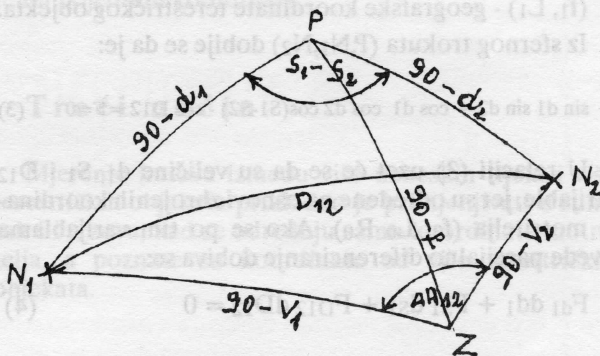
U "Našem moru" br. 2-3/92. objavio sam članak "Numeričko određivanje pozicije broda -na osnovi mjerenih kutova između terestričkih objekata-". U članku je obrađeno novo opće numeričko rješenje koje vrijedi za sve kutove među objektima, bez obzira u kojoj se ravnini mjere. Rješenje je izvedeno na osnovi matematičkih relacija ravne trigonometrije.

U ovom članku pokazat će se slična nova mogućnost određivanja geografskih koordinata na osnovi mjerenih kutova između nebeskih tijela i terestričkih objekata, također, bez obzira u kojoj se ravnini kutovi mjere. Rješenje će se izvesti na osnovi matematičkih relacija sferne trigonometrije i relacija koje su postavljene u Descartesovom ekvatorskom prostornom koordinatnom sustavu. Terestrički objekti mogu biti svjetionici, rtovi, vrhovi brda ili neke druge strukture.

## Izvod matematičkog rješenja

U izvođenju matematičkog rješenja polazi se od pretpostavke da se u smjeru terestričkog objekta, od kojega se mjeri kut do nebeskog tijela, nalazi fiktivna zvijezda

stajačica ( $N_1$ ). Na temelju toga postavlja se sferni trokut ( $P, N_1, N_2$ ) na slici 1.



Slika 1.

Veličine na slici 1. su:

- P - nebeski pol,
- $N_1$  - fiktivna zvijezda u smjeru motritelj-terestrički objekt,
- $N_2$  - zvijezda od koje se mjeri kutna udaljenost do terestričkog objekta (zvijezde  $N_1$ ),
- $d_1$  - deklinacija zvijezde  $N_1$ ,
- $d_2$  - deklinacija zvijezde  $N_2$ ,
- $D_{12}$  - kutna udaljenost između zvijezda  $N_1$  i  $N_2$ ,
- $S_1$  - satni kut Greenwicha zvijezde  $N_1$ ,
- $S_2$  - satni kut Greenwicha zvijezde  $N_2$ ,
- Z - zenit motritelja,
- f - geografska širina motritelja,
- $V_1$  - visina zvijezde  $N_1$ ,
- $V_2$  - visina zvijezde  $N_2$
- $D A_{12}$  - razlika azimuta zvijezde  $N_1$  i  $N_2$ .

Približne koordinate fiktivne zvijezde  $N_1$  ( $d_1, S_1$ ) mogu se izračunavati na osnovi poznatih koordinata terestričkog objekta ( $f_1, L_1, R_1$ ) i koordinata zbrojene

\* Dr. Ivo Sjekavica  
Pomorski fakultet Dubrovnik  
Dubrovnik

pozicije motritelja ( $f_0$ ,  $L_0$ ,  $R_0$ ). U ekvatorskom prostornom koordinatnom sustavu izlazi da su:

$$\tan d_1 = \frac{R_1 \sin f_1 - R_0 \sin f_0}{((R_1 \cos f_1 \cos L_1 - R_0 \cos f_0 \cos L_0)^2 + (R_1 \cos f_1 \sin L_1 - R_0 \cos f_0 \sin L_0)^2)^{1/2}} \quad (1)$$

$$\cos S_1 = \frac{R_1 \cos f_1 \cos L_1 - R_0 \cos f_0 \cos L_0}{((R_1 \cos f_1 \cos L_1 - R_0 \cos f_0 \cos L_0)^2 + (R_1 \cos f_1 \sin L_1 - R_0 \cos f_0 \sin L_0)^2)^{1/2}} \quad (2)$$

gdje su:

$R_0 = R + h_0$  - radijus Zemlje više procijenjena visina motritelja ( $h_0$ ) od nivoa mora,

$R_1 = R + h_1$  - radijus Zemlje više visina terestričkog objekta ( $h_1$ ) od nivoa mora.

$(f_0, L_0)$  - geografske koordinate motritelja,

$(f_1, L_1)$  - geografske koordinate terestričkog objekta.

Iz sfernog trokuta ( $P, N_1, N_2$ ) dobije se da je:

$$\sin d_1 \sin d_2 + \cos d_1 \cos d_2 \cos(S_1 - S_2) - \cos D_{12} = F = 0 \quad (3)$$

U relaciji (3) uzet će se da su veličine  $d_1$ ,  $S_1$  i  $D_{12}$  varijable, jer su određene na osnovi zbrojenih koordinata motritelja ( $f_0, L_0, R_0$ ). Ako se po tim varijablama izvede parcijalno diferenciranje dobiva se:

$$F_{d_1} dd_1 + F_{S_1} dS_1 + F_{D_{12}} dD_{12} = 0 \quad (4)$$

gdje su:

$F_{d_1}, F_{S_1}, F_{D_{12}}$  - parcijalne derivacije relacija  $F$  po varijablama  $d_1, S_1, D_{12}$ .

U daljnjem postupku napisat će se relacije (1) i (2) u nešto skraćenom i transformiranom obliku:

$$\tan d_1 ((b_1 - R_0 \cos f_0 \cos L_0)^2 + (c_1 - R_0 \cos f_0 \sin L_0)^2)^{1/2} - a_1 + R_0 \sin f_0 = G = 0 \quad (5)$$

$$\cos S_1 ((b_1 - R_0 \cos f_0 \cos L_0)^2 + (c_1 - R_0 \cos f_0 \sin L_0)^2)^{1/2} - e_1 + R_0 \cos f_0 \cos L_0 = H = 0 \quad (6)$$

gdje su zamijenjene veličine označene s:

$$R_1 \sin f_1 = a_1$$

$$R_1 \cos f_1 \cos L_1 = b_1$$

$$R_1 \cos f_1 \sin L_1 = c_1$$

$$R_1 \cos f_1 \cos L_1 = e_1$$

Parcijalnim diferenciranjem relacija (5) i (6) po varijablama  $d_1, S_1, f_0$  i  $L_0$ , dobiva se:

$$G_{d_1} dd_1 + G_{f_0} df + G_{L_0} dL = 0 \quad (7)$$

$$H_{S_1} dS_1 + H_{f_0} df + H_{L_0} dL = 0 \quad (8)$$

gdje su:

$G_{d_1}, G_{f_0}, G_{L_0}$  - parcijalne derivacije relacije  $G$  po varijablama  $d_1, f_0, i L_0$ .

$H_{S_1}, H_{f_0}, H_{L_0}$  - parcijalne derivacije relacije  $H$  po varijablama  $S_1, f_0, i L_0$ .

Ako se iz relacija (7) i (8) eksplicitno izraze veličine  $dd_1$  i  $dS_1$  i uvrste u relaciju (4), nakon sređivanja, dobiva se:

$$-(F_{d_1} \frac{G_{f_0}}{G_{d_1}} + F_{S_1} \frac{H_{f_0}}{H_{S_1}}) df - (F_{d_1} \frac{G_{L_0}}{G_{d_1}} + F_{S_1} \frac{H_{L_0}}{H_{S_1}}) dL + F_{D_{12}} dD_{12} = 0 \quad (9)$$

U relaciji (9) uzet će se da su:

$$-(F_{d_1} \frac{G_{f_0}}{G_{d_1}} + F_{S_1} \frac{H_{f_0}}{H_{S_1}}) = a \quad (10)$$

$$-(F_{d_1} \frac{G_{L_0}}{G_{d_1}} + F_{S_1} \frac{H_{L_0}}{H_{S_1}}) = b \quad (11)$$

$$F_{D_{12}} = c \quad (12)$$

Uvrštavanjem tih zamjena dobije se jednadžba pravca položaja motritelja u sređenom obliku:

$$a df + b dL + c dD_{12} = 0 \quad (13)$$

Diferencijalne veličine  $df$  i  $dL$  razlike su između pravih i zbrojenih koordinata motritelja, a  $dD_{12}$  razlika je između izmjerene ( $D_{12}$ ) i izračunate ( $D_{012}$ ) kutne udaljenosti od zvijezde  $N_2$  do terestričkog objekta (zvijezde  $N_1$ ).

$$dD_{12} = D_{12} - D_{012} \quad (14)$$

Mjerenje kutne udaljenosti izvodi se sa sekstantom, a njeno izračunavanje relacijom (3).

Izmjerenu kutnu udaljenost prethodno je potrebno ispraviti za utjecaj refrakcije. Relaciju za taj ispravak odredit će se na osnovi kosinusovog poučka iz trokuta ( $N_1, Z, N_2$ ).



$$\sin V_1 \sin V_2 + \cos V_1 \cos V_2 \cos D_{A12} - \cos D_{12} = E = 0 \quad (15)$$

Diferenciranjem relacije (15) po visinama ( $V_1, V_2$ ) i kutnom udaljenosti ( $D_{12}$ ), nakon sređivanja, dobije se da je:

$$dD_{r12} = - \frac{E_{v01} dV_{r1} + E_{v02} dV_{r2}}{E_{D012}} \quad (16)$$

gdje su:

$dD_{r12}$  - iznos veličine ispravke kutne udaljenosti ( $D_{12}$ ) za utjecaj refrakcije,

$dV_{r1}$  - iznos veličine refrakcije za terestrički objekt (zvijezdu  $N_1$ ),

$dV_{r2}$  - iznos veličine refrakcije za zvijezdu  $N_2$ ,

$E_{v01}, E_{v02}, E_{D012}$  - parcijalne derivacije relacije  $E$  po varijablama  $V_{01}, V_{02}$  i  $D_{012}$ .

### Mogući načini primjene metode

Metoda se može primjenjivati na tri načina:

1. da se mjere kutovi između jednog nebeskog tijela i više terestričkih objekata,
2. da se mjere kutovi između više nebeskih tijela i jednog terestričkog objekta,
3. da se mjere kutovi između više nebeskih tijela i više terestričkih objekata.

### Prvi način

Mjerenje kutova između jednog nebeskog tijela i više terestričkih objekata prikladno se može primjenjivati danju kad se vidi samo Sunce ili Mjesec i više terestričkih objekata kojima se poznaju koordinate.

Ovaj način mogao bi se primjenjivati i tako da se mjeri kutna udaljenost od jednog nebeskog tijela i jednog ili više terestričkih objekata u dovoljnom razmaku vremena.

### Drugi način

Mjerenje kutova između više nebeskih tijela i jednog terestričkog objekta može se primjeniti u sumraku ili u zoru kad se vidi više nebeskih tijela (zvijezda) i jedan prikladan terestrički objekt.

Tim postupkom mogu se odrediti:

a) Koordinate motritelja ( $f, L$ ) kad se mjere kutne udaljenosti dviju zvijezda, a poznata je koordinata motritelja ( $R+h$ ) i koordinate terestričkog objekta ( $f_1, L_1, R_1$ ).

b) Koordinate motritelja ( $f, L, R+h$ ) kad se mjere kutne udaljenosti triju zvijezda, a poznate su koordinate terestričkog objekta ( $f_1, L_1, R+h_1$ ) ili mogu se odrediti koordinate terestričkog objekta ( $f_1, L_1, R+h_1$ ) kad su poznate koordinate motritelja ( $f, L, R+h$ ).

c) Koordinate motritelja ( $f, L, R+h$ ) i koordinate terestričkog objekta ( $f_1, L_1, R+h_1$ ), ako se mjere kutne udaljenosti od šest zvijezda i terestričkog objekta kojemu su poznate približne (procijenjene) koordinate.

Kad se određuju koordinate navedene u točkama (b) i (c) prethodno je potrebno izvesti dopunsko diferenciranje u relacijama (5) i (6) po dodatnim koordinatama i analogno proširiti jednadžbu položaja (13).

Proširena jednadžba (13) dobiva oblik:

$$a df + b dL + e dh + g df_1 + k dL_1 + p dh_1 + c dD_{12} = 0 \quad (17)$$

gdje se veličine  $e, g, k$  i  $p$  odrede analogno kao i veličine  $a, b$  i  $c$  u relaciji (13). Diferencijalne veličine razlike su između pravih i zbrojenih odnosno procijenjenih pojedinih koordinata.

### Treći način

Mjerenje kutova između više nebeskih tijela i više terestričkih objekata prikladno je primjenjivati u sumraku ili u zoru, kad se određuju samo koordinate motritelja, a poznate su koordinate od više terestričkih objekata.

### Postavljanje sustava jednadžbi

Zavisno od načina i broja motrenja te koordinata koje se poznaju i koje se određuju postavlja se sustav jednadžbi. Sustav može imati dvije jednadžbe tipa (13) ako se određuju samo koordinate ( $f, L$ ) motritelja ili do šest jednadžbi tipa (17) kad se određuju i neke ostale koordinate.

Ako se želi eliminirati i sustavnu pogrešku u izvedenim mjerenjima potrebno je pojedine sustave jednadžbi dopuniti s još jednom jednadžbom na osnovi jednog dodatnog motrenja.

Rješavanjem pojedinih sustava jednadžbi mogu se dobiti slijedeće prave koordinate:

$$f = f_0 + df \quad (18)$$

$$L = L_0 + dL \quad (19)$$

$$R+h = R_0 + dh \quad (20)$$

$$f_1 = f_{01} + df_1 \quad (21)$$

$$L_1 = L_{01} + dL_1 \quad (22)$$

$$R+h_1 = R_{01} + dh_1 \quad (23)$$

gdje oznaka (0) označava zbrojene ili procijenjene koordinate.

**ZAKLJUČAK**

Obradenom metodom dobivaju se nove mogućnosti astronomske određivanja geografskih koordinata. U obradi su date osnovne postavke metode i istaknute su mogućnosti njene primjene na više načina.

Metoda se može koristiti na moru u obalnoj i priobalnoj navigaciji, a može se upotrebljavati i na kopnu za određivanje koordinata motritelja ili i koordinata terestričkog objekta.

Naknadnom analizom potrebno je utvrditi kolika je valjanost pojedinih navedenih mogućnosti i usporediti ih s ostalim metodama određivanja geografskih koordinata.

Rukopis primljen. 28. 6. 1993.

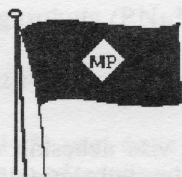
**DETERMINING THE GEOGRAPHICAL COORDINATES**

**-on the basis of the angles measured between the celestial bodies and terrestrial objects-**

*Summary*

*The article has treated the possibility of determining the geographical coordinates on the basis of the angles measured between the celestial bodies and the terrestrial objects regardless of the fact in which plane the angles are measured.*

*It has been pointed out that this method could be applied in various ways: 1. by measuring the angles between one celestial body and several terrestrial objects; 2. by measuring the angles between several celestial bodies and one terrestrial object; 3. by measuring the angles between several celestial bodies and several terrestrial objects.*



**MEDITERANSKA PLOVIDBA d.d.**  
**KORČULA - HRVATSKA**

**DIREKCIJA - KORČULA**

**Telegram: Mediteranska Korčula**

**Telex: 27528 MEDKOR**

**Telefoni: 050/ 711-156**

**711-155**

**Telefax: 050/ 711-157**

**RASPOLAŽE SPECIJALNIM BRODOVIMA HLADNJAČAMA ZA PRIJEVOZ LAKO POKVARLJIVIH TERETA PO SVIM MORIMA SVIJETA.**

**PREVOZI ROBU U SLOBODNOJ PLOVIDBI PO SVIM MORIMA SVIJETA**

**SUVREMENIM TRAJEKTOM ODRŽAVA VEZU KORČULA - KOPNO.**