Matka 26 (2017./2018.) br. 103

DOMINO PLOČICE I 4 × 4 PLOČA – TREĆA IGRA

Maja Starčević, Zagreb

Eva i Petar u ponedjeljak su se opet susreli u školi. Za vrijeme velikog odmora Petar je Evi pokazao još jedan zadatak s domino pločicama i 4×4 pločom.

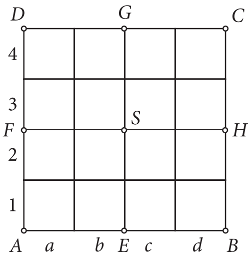
– Odlučio sam pronaći ukupan broj načina na koji možemo popločiti čitavu ploču. Jučer smo pronašli popločivanja čitave ploče kod kojih smo zahtijevali simetričnost, a sada nećemo postavljati nikakve uvjete. Dakle, očekujem da ćemo dobiti više popločivanja.

– Jesi li promijenio pravila popločivanja?

– Ne, i dalje svaku pločicu stavljam na točno dva polja i to tako da se ne vide točkice, te i dalje pločice ne mogu staviti jednu preko druge. Ploču opet gledam samo iz jednoga smjera.

Petar je imao početnu ideju:

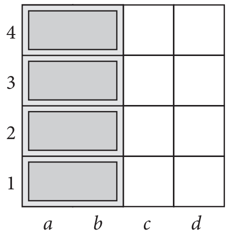
– Označit ću neke točke na rubu ploče $ABCD$. Polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ označit ću redom s E, H, G i F, a središte kvadrata sa S (Slika 1.). Podijelit ću ploču na dva sukladna pravokutnika $AEGD$ i $EBCG$. Prvo ću otkriti na koliko načina mogu popločiti pravokutnik $AEGD$ tako da se pločice koje koristim u potpunosti nalaze unutar njega. Podijelit ću i pravokutnik $AEGD$ na dva sukladna dijela, kvadrate $AESF$ i $FSGD$. Sada gledam na koliko načina mogu popločiti svaki od njih tako da im sve pločice u potpunosti pripadaju.



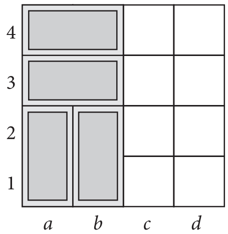
Slika 1.

– Očito je da svaki od tih kvadrata možeš popločiti samo na dva načina, vodoravnim ili okomitim pločicama.

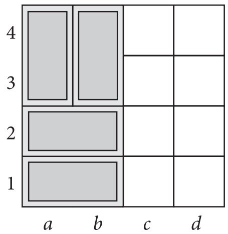
– Da, i onda pravokutnik $AEGD$ mogu popločiti tako da u svakome od kvadrata $AESF$ i $FSGD$ odaberem jedan od tih načina, dakle na $2 \cdot 2 = 4$ načina (Slike 2., 3., 4., 5.).



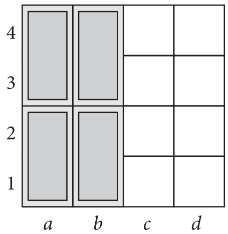
Slika 2.



Slika 3.



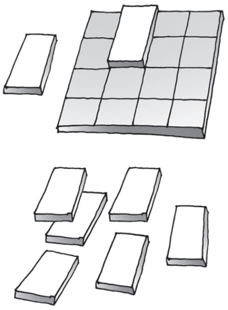
Slika 4.

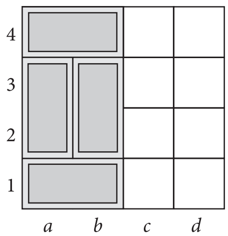


Slika 5.

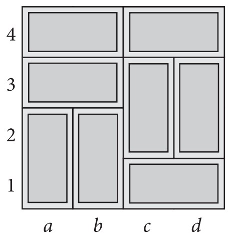
– Ali pravokutnik *AEGD* možeš popločiti i tako da neke pločice prelaze iz kvadrata *AESF* u kvadrat *FSGD*.

– Tako je. Jedine pločice koje imaju to svojstvo su pločice *a*2 – *a*3 i *b*2 – *b*3. Ako stavim pločicu *a*2 – *a*3, onda dalje pravokutnik *AEGD* moram popločiti pločicama *a*1 – *b*1 i *a*4 – *b*4 i na kraju pločicom *b*2 – *b*3 (Slika 6.). Jednako postavljanje dobivam i ako na početku stavim pločicu *b*2 – *b*3.





Slika 6.



Slika 7.

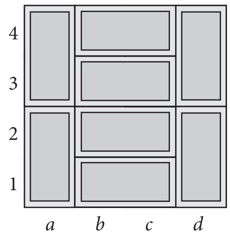
– Da zaključimo, pravokutnik *AEGD* uspio si popločiti na ukupno 5 načina. Na toliko se načina onda može popločiti i pravokutnik *EBCG*.

– Da. Sad moram vidjeti kako to mogu primijeniti na popločivanje čitave ploče. Za pravokutnik *AEGD* odaberem jedan od tih 5 načina postavljanja pločica, te isto tako za pravokutnik *EBCG* odaberem jedan od 5 načina. Npr. za prvi ću pravokutnik odabrati drugi način, a za drugi pravokutnik peti, pa dobivam jedno popločivanje ploče (Slika 7.).

– To znači da takva popločivanja možeš napraviti na 5 · 5 = 25 načina.

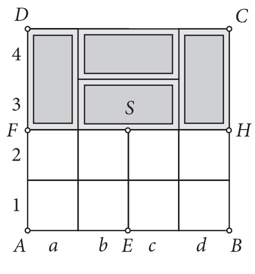
– Dobro si primijetila. Problem je jedino u tome što ploču mogu popločiti i tako da mi pločice prelaze iz jednog pravokutnika u drugi. Ali ono što mogu primijetiti je da ako mi prelazi jedna ili tri pločice, u svakom mi pravokutniku ostaje neparan broj polja koja ne mogu sva popločiti pločicama. Naime, svaka pločica prekriva 2 polja pa nekoliko pločica uvijek prekriva paran broj polja. Dakle, takvih pločica koje prelaze može biti samo dvije ili četiri.

– Ako imaš 4 pločice koje prelaze iz jednog pravokutnika u drugi, onda ploču dalje možeš popločiti samo na jedan način (Slika 8.).

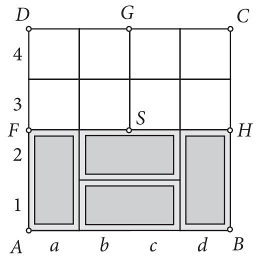


Slika 8.

– Kad mi prelaze samo dvije pločice, onda imam više kombinacija. U prvom mi slučaju mogu prelaziti pločice *b*3 – *c*3 i *b*4 – *c*4 (Slika 9.). Onda moram obvezno staviti i pločice *a*3 – *a*4 i *d*3 – *d*4. Nakon toga moram popločiti kvadrate *AESF* i *EBHS* tako da im pločice u potpunosti pripadaju. O tome smo već diskutirali, možemo to napraviti na 2 · 2 = 4 načina.



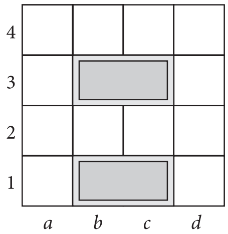
Slika 9.



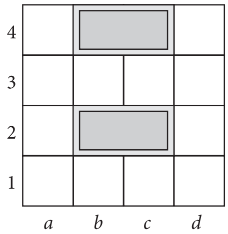
Slika 10.

– Kad bi pločice koje prelaze iz pravokutnika u pravokutnik bile *b*1 – *c*1 i *b*2 – *c*2 (Slika 10.), dobili bismo nešto vrlo slično. Onda obvezno moramo staviti pločice *a*1 – *a*2 i *d*1 – *d*2 pa moramo popločiti prvo kvadrat *FSGD*, a onda kvadrat *SHCG*, i pločice opet moraju biti u potpunosti unutar njih. Dakle, i tu dobivamo 4 načina.

– Ali imamo još načina kako dvije pločice mogu prelaziti iz pravokutnika u pravokutnik. To mogu biti pločice *b*1 – *c*1 i *b*3 – *c*3 (Slika 11.) ili *b*2 – *c*2 i *b*4 – *c*4 (Slika 12.). Međutim, tada ne možemo postaviti ostale pločice tako da nijedna ne prelazi iz pravokutnika u pravokutnik. Dakle, ovdje ne dobivamo nijedno popločivanje.

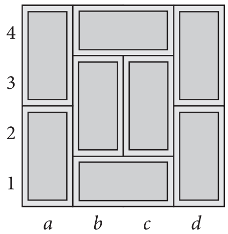


Slika 11.

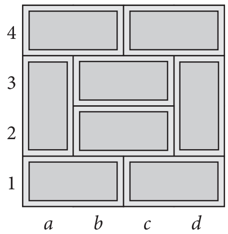


Slika 12.

– Uočila sam još i slučaj kad su te dvije pločice koje prelaze pločice $b1 - c1$ i $b4 - c4$, te $b2 - c2$ i $b3 - c3$. Tada je jasno kako dalje moramo popločivati (Slike 13., 14.). Dakle, u oba slučaja dobivamo još po jedno popločivanje.



Slika 13.



Slika 14.

– Sada samo preostaje vidjeti koliko smo ukupno popločivanja pronašli. Ako sam dobro zapamtio, imamo 25 + 1 + 4 + 4 + 1 + 1 = 36 popločivanja.

– Slažem se – kaže Eva. – Inače, imam i ja jednu ideju.

– Imaš još jedan zadatak koji bismo mogli riješiti?

– Ne jedan, nego tri. Ali ne za nas, nego za prijatelje iz razreda. Postavit ćemo im ove izazovne zadatke:

1. Na koliko načina možete postaviti jednu pločicu na ploču tako da ne dira nijedan vrh ploče?
2. Na koliko načina možete postaviti dvije pločice na ploču tako da nijedna ne dira vrhove ploče?
3. Na koliko načina možete popločiti čitavu ploču tako da popločivanje bude simetrično s obzirom na pravac *EG*?

– Znaš li i odgovore?

– Znam, 16, 88 i 12, ali nemoj im reći prije nego što sami pokušaju riješiti zadatke.

– Neću, obećajem!