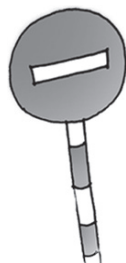


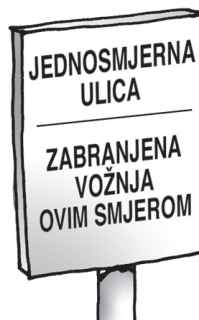
ŠTO JE ZAJEDNIČKO PROMETNIM ZNAKOVIMA I MATEMATIČKIM JEDNADŽBAMA (ILI – NEKOLIKO RIJEČI O APSTRAKCIJI)

Jadranka Delač-Klepac, Zagreb



Odgovor na ovo pitanje također je dio matematike, odnosno čarobmatike.

Ako ugledamo ovaj prometni znak na početku neke ulice ili u rukama policajca, znamo što on znači. Ta oznaka znači zabranu kretanja automobilom u određenom smjeru. Zamislite da se umjesto toga znaka nalazi ovakva ploča:



Koliko bismo više vremena izgubili u vožnji dok usporimo auto i pročitamo što piše, osobito ako se nalazimo u nekoj stranoj zemlji čijim se jezikom ne služimo, recimo kineskim, japanskim ili finskim! Dakle, simboli koji predstavljaju prometne znakove imaju smisla, osobito ako dogovorno vrijede, recimo, u cijeloj Europi ili cijelome svijetu. Dovoljno je letimično baciti pogled i već znamo što ti simboli predstavljaju.

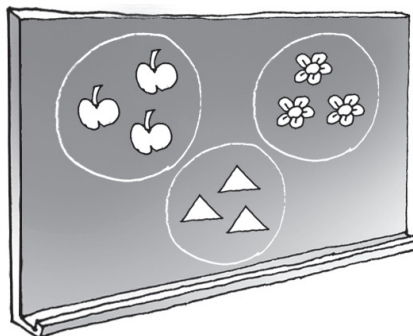
A rezultat? Ušteda vremena i neometan protok prometa.

S „problemskim zadatcima” ili „zadatkima s riječima” učenici se susreću već u nižim razredima osnovne škole i u pravilu ih baš i ne vole. Ne vole ih zato jer takvi zadatci od njih zahtijevaju da ulože izvjestan napor, da razmišljaju, da „uključite mozak”! U stvari, oni se samo susreću s pojmom apstrakcije, a da to i ne znaju.

Apstrakcija je proces koji se odvija u našim glavama i zato je učenicima težak. S vremenom se na neke apstraktne pojmove naviknemo pa više ni ne razmišljamo o njima jer nismo svjesni tog procesa, kao primjerice kod pojma broja, nepoznanice, oblika idealnog kvadrata ili kružnice.

Pojam apstrakcije najjednostavnije možemo predočiti i objasniti kod shvaćanja pojma broja koji smo svi usvojili još u djetinjstvu.

Promatrajmo sljedeće skupove:



Svim ovim skupovima možemo pridružiti isti simbol – **broj 3**. Dakle, bitno svojstvo ovih skupova je da imaju isti broj elemenata – objekata. U ovom razmišljanju koristili smo čak nekoliko razina apstrakcije do usvajanja samog simbola za broj 3.

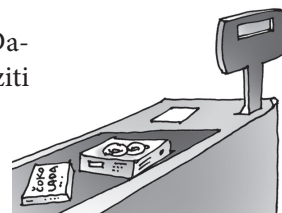
Pogledajmo sljedeća dva zadatka:

Zadatak 1: Otac je tri puta stariji od svoga sina, ali će za deset godina biti samo dvostruko stariji. Koliko sin ima godina?

Zadatak 2: Kutija keksa tri je puta skuplja od ploče čokolade. Ako obje poskupe za deset kuna, kutija keksa bit će dvostruko skuplja. Koja je cijena čokolade?

Rješenje: Označimo nepoznate godine sina simbolom x , a očeve s y . Dakle, to su **nepoznanice** koje tražimo. Tada gornje rečenice možemo izraziti sljedećim sustavom jednadžbi:

$$\begin{aligned}y &= 3x \\ 2(x + 10) &= y + 10\end{aligned}$$



Rješenje ovog sustava je $x = 10$ (y se nije tražio, ali ga lako izračunamo!)

Dakle, ako ovaj rezultat opet pretočimo u riječi, možemo reći: *sin ima 10 godina*.

Analogno, ako cijenu čokolade označimo s x , a cijenu kutije keksa s y , dobit ćemo istovjetan sustav jednadžbi i isto rješenje. Dvije različite situacije možemo opisati istim matematičkim modelom.



Pokušajmo ovaj proces razmišljanja opisati postupno:

1. Stvarnu smo situaciju izrazili riječima.
2. Koristeći **apstrakciju** pretvorili smo riječi u logički koncept.
3. Logički koncept pretvorili smo u simbole i jednadžbe opet koristeći **apstrakciju**.
4. Koristeći dopuštena pravila i logičke argumente, riješili smo jednadžbe.



5. Vratili smo se na početak stvarne situacije ponovno pretvorivši rješenje u riječi.

Štoviše, ako to još malo proučimo, sustav jednadžbi možemo zapisati općenitije („prođubimo apstrakciju”) u obliku:

$$y = ax + b$$

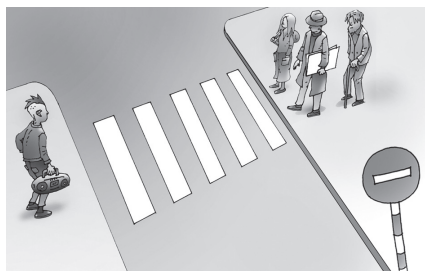
$$y = cx + d$$

gdje su a, b, c, d cijeli brojevi, a barem jedan od a, c (ili oba) različit je od nule.

Kada bi a i c istovremeno bili 0, tada sustav ne bi imao rješenja. Također, sustav nema rješenja ako je $a = c, b \neq d$.

Taj sustav ima beskonačno mnogo rješenja ako je:

$$d = b, a = c, \text{ jer je } x = \frac{d - b}{a - c}.$$



Sličan način razmišljanja moći ćemo primijeniti u mnogim drugim situacijama koje možemo svesti na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice, primijenivši pravila za računanje s realnim brojevima. Za rješavanje ovakvih sustava koristimo se čak i s više metoda (tzv. metode eliminacije, supstitucije, izjednačavanja strana, iako se na kraju sve to svodi na isto – pronalaženje rezultata!).

Što je zajedničko, odnosno koja je veza između prometnih znakova i ovih zadataka?

Da, način razmišljanja. **Apstrakcija.**

Riječ *apstrakcija* potječe od latinske riječi *abstractio*, što znači – izdvajanje, izvlačenje, odvajanje, odvlačenje.

Matematika je apstraktna znanost u kojoj različite objekte (veličine) iz stvarnog svijeta, kao i odnose među njima, apstrahiramo i označavamo različitim simbolima (+, :, $a, b, x, y...$) te tako lakše proučavamo i dolazimo do rezultata – rješenja. To je jedan od temeljnih misaonih procesa koji se direktno naslanja na analogiju i generalizaciju (poopćavanje), dakle na metode koje nam omogućuju da uočimo neka bitna svojstva nekog skupa. (O analogiji je već bilo govora u *Matki* br. 98, priča *Abrakadabra*.) Kako bismo još jednostavnije opisali taj postupak apstrahiranja?

Najprije tražimo sličnosti između različitih objekata, zatim ignoriramo različitosti, a ono što im je zajedničko pokušavamo opisati nekim receptom, formulom, jednadžbom, simbolom – baš kao u zadacima 1. i 2. ili kod pojma broja tri.



Apstrakcija je ključan način razmišljanja koji se koristi u matematici. Ponekad nam se čini da se tako odmičemo od stvarnosti, ali, zapravo, na taj si način olakšavamo i pomažemo riješiti mnoge situacije iz stvarnog života.

Primjerice, ako za jedan pregradni zid trebamo upotrijebiti 120 cigala, a u zgradi treba načiniti točno 20 takvih zidova, koliko ćemo cigala trebati za taj dio posla?

Ili, ako mi je ova torta dovoljna za 10 ljudi, a na zabavi će biti 30 ljudi, koliko ovakvih torta trebamo napraviti? Način i korake procesa razmišljanja do postizanja odgovora neposredno smo prije opisali.

Da, matematika se zasniva na apstrakciji, logičkim procesima i razmišljanju, kao i na idealiziranju situacija i stvari. **Ako** mi je ova torta dovoljna za 10 ljudi, **onda** trebam tri takve torte za nahraniti 30 ljudi. Ako je pretpostavka točna (a o tome se može diskutirati – jesu li svi komadi torte jednaki, žele li baš svi pojesti komad torte ili postoje neki „osobenjaci” koji ne vole kolače), onda je i zaključak točan.

Matematika idealizira stvari. Ako nacrtamo pravac ili kružnicu, je li to **idealan** pravac ili kružnica? Naravno da u stvarnosti nije, ali u našoj mašti jest. Ništa nije savršeno, ali mi možemo zamišljati da jest.

Većina drugih znanosti (biologija, fizika, kemija, medicina...) zasniva se na **eksperimentu**. Svaki eksperiment ima svoje zakonitosti: dovoljno velik uzorak, kontrolirane uvjete pokusa, kontrolu vanjskih faktora itd. Na kraju, pri obradi statističkih podataka – rezultata, opet dolazimo do matematike i apstrakcije.

A **statistika** je dio matematike.

Suprotnost apstrakciji je **konkretizacija**.

Pojam apstrakcije susreće se i u drugim ljudskim djelatnostima poput umjetnosti, književnosti, psihologije, filozofije i sl., ne samo u znanosti.

Opet vidimo da je matematika baš svugdje oko nas, a možemo naslutiti koliko su mašta i sposobnost predodžbe važni za razumijevanje matematike.

Zato maštu, sposobnost predočavanja i vizualiziranja stvari, te kreativnost i načine razmišljanja treba i vježbati, čuvati, razvijati i cijeniti.

Začetci ovakvog načina razmišljanja i spominjanja apstrakcije mogu se naći kod matematičara Talesa (624. – 548. p. K.), Pitagore (570. – 497. p. K.) te filozofa Sokrata (469. – 399. p. K.) i Platona (429. – 348. p. K.)

