MATEMATIČKO-SPORTSKI DETEKTIVI

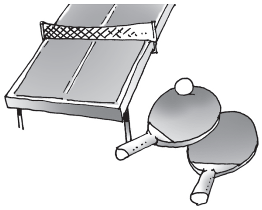
Siniša Režek, Zagreb

Ako želiš biti vrhunski detektiv, trebaš imati petlju, inteligenciju i kreativnost. Biti detektiv mogu samo hrabri. Naći ćeš se u nepoznatim, možda i opasnim situacijama iz kojih će te ponekad izvući samo tvoje sposobnosti. To znači imati petlju. Trebat ćeš naučiti mnoge vještine i znati logički razmišljati. Potrebno ti je znanje! U tome će ti pomoći svakodnevno učenje, koliko god ti se to sada činilo bez veze. Svjetski detektivi odlikuju se vrhunskim znanjima iz raznih područja. Trebaš biti i spretan! Ukoliko se baviš nekim sportom, to će ti uvelike pomoći, a ako nisi sportaš, vrijeme je da počneš vježbati. Maštovitost i kreativnost su neizostavni. Naći ćeš se u situacijama kad treba improvizirati, na brzinu se snaći, izraditi neki alat ili pomagalo. U slobodno vrijeme pokušaj izrađivati razne stvari.

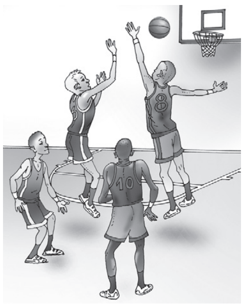
Nadalje, od osnovne opreme za matematičko-sportskog detektiva potrebno ti je sljedeće: blok, olovka i gumica, ručni sat, šilt kapa...

Vidiš, postati detektiv nije lako, a ostati u formi još je teže jer detektivski posao zahtijeva stalno vježbanje „sivih stanica”. Obožavaš detektivske slučajeve, a rješavanje najtežih zagonetki i neobjašnjivih misterija ti je u krvi? Oduvijek si smatrao da bi bio sjajan detektiv? Okušaj se u rješavanju nekoliko zanimljivih situacija iz svijeta sporta, u kojima sportašima moraš pomoći da riješe probleme.

Nemoj očajavati ako zapneš nego se koncentriraj i nastavi razmišljati. U nekim slučajevima bitni su detalji, dok u drugima morate pokazati maštovitost. Dakle, da počnemo...

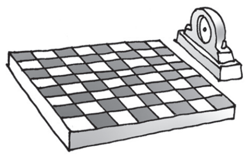


Stolni tenis. Šest učenika ima tri stola za igranje stolnog tenisa. Na koliko načina mogu odigrati svi po jedan meč međusobno?



Košarka. Dvije košarkaške momčadi odustale su tijekom turnira. Do tada je jedna od njih odigrala 10 mečeva, a druga samo jedan. Na turniru je odigrano ukupno 55 mečeva. Otkrijte jesu li dvije momčadi koje su odustale – igrale međusobno!

Tenis. Tenisači Marko, Nikica i Petar igrali su tromeč. Pobjednik tromeča stječe pravo sudjelovanja na masters-turniru za prvenstvo svijeta. Ne čekajući da se završe mečevi, jedan novinar javio je svojoj redakciji da je prvi Marko, a ne Nikica i da Petar nije posljednji. Poslije završetka mečeva ispostavilo se da je novinar pogodio plasman samo jednog tenisača. Kakav je redoslijed na završetku tromeča?



Šah. Brojevi 1, 2..., n^2 upisani su u polja šahovske ploče od $n \times n$ polja, kao na slici. S ploče je izbrisan neki broj, a poslije toga precrtan je red i stupac koji sadrži taj broj. To isto napravljeno je s preostalih $(n-1)^2$ brojeva, itd., n puta. Nađite zbroj izbrisanih brojeva!

Nogomet. U svlačionici na nogometnom stadionu nalaze se tri žaruljice. U hodniku su tri odgovarajuća prekidača za ove žaruljice, no ne znamo kako su spojene. Iz hodnika se ne vide žaruljice. Možemo se zadržati u hodniku koliko želimo i možemo paliti i gasiti prekidače, ali kada uđemo u prostoriju, više ne smijemo dirati prekidače. Za svaku žaruljicu trebate pogoditi odgovarajući prekidač.

Nakon što zadatak riješite, provjerite rezultat u donjem odlomku. Ako ste točno odgovorili, prijeđite na sljedeći zadatak. Ako zadatak ne znate riješiti, razmislite ili potražite pomoć prvo prijatelja, a tek onda učitelja. Ova rješenja također sadrže kratku uputu, što bi vam trebalo biti dovoljno da zadatak riješite. Nemojte prerano koristiti Rješenja! Tek ako i nakon nekoliko uzastopnih pokušaja niste uspjeli riješiti zadatak, pročitajte potpuno rješenje. Rješenja su zapisana riječima, ali i slikovno, tako da zorno možete riješiti slučaj.

1. Svaki način napisat ćemo u obliku 3 para. Označimo li učenike brojevima od 1 do 6, onda svih 6 učenika može igrati odjednom tri meča – po jedan par na jednome od 3 stola za stolni tenis. Zadržavajući ista tri para, a mijenjajući stolove za stolni tenis, dobit ćemo 6 različitih mogućnosti. Ako s a, b i c označimo stolove za stolni tenis, onda tih 6 mogućnosti glasi:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) \text{ i } (c, b, a).$$

Kako svaki učenik treba odigrati po jedan meč s preostalih 5 učenika, ukupan je broj mogućnosti jednak $6 \cdot 5 = 30$.

2. Momčadi su međusobno igrale! Da nisu bile odigrale međusobno, tada bi broj momčadi x zadovoljavao jednadžbu:

$$x \cdot (x - 1) : 2 + 11 = 55$$
$$x^2 - x = 44 \cdot 2$$
$$x^2 - x = 88$$

Kako rješenja ove jednadžbe nisu prirodni brojevi, zaključujemo da su te ekipe odigrale međusobnu utakmicu.

Sukladno tome, ako su one igrale između sebe, jednadžba:

$$x \cdot (x - 1) : 2 + 10 = 55$$
$$x^2 - x = 45 \cdot 2$$
$$x^2 - x = 90$$

ima jedno pozitivno rješenje, $x = 10$.

3. Zadatak ćemo riješiti upotrebom nejednakosti. Označimo s m, n i p redne brojeve mjesta koja su osvojili šahisti (zbog prvih slova njihovih imena Marko, Nikica i Petar). Znači, m, n i p su prirodni brojevi manji od 4.

Iz prognoze novinara proizlazi da je $m = 1$, $2 \leq n \leq 3$, te $1 \leq p \leq 2$. Ako bi bilo točno samo da je $m = 1$, onda bismo dobili i $n = 1$, te $p = 3$. Negacija izraza $2 \leq n \leq 3$ je $n = 1$. To je nemoguće.

Ako bi bilo točno da je $2 \leq n \leq 3$, onda bismo negiranjem prve i treće izjave dobili: $2 \leq m \leq 3$, te $p = 3$. To je nemoguće jer proizlazi da nijedan nije osvojio prvo mjesto.

Ako je točna samo treća izjava $1 \leq p \leq 2$, onda je i $2 \leq m \leq 3$, te $n = 1$. Odavde dobivamo rješenje da je $n = 1$, $p = 2$, te $m = 3$, tj. prvi je Nikica, drugi Petar, a treći Marko.

4. Brojeve upisane u polja šahovske ploče napišimo na sljedeći način:

$$n \cdot 0 + 1;\ n \cdot 0 + 2;\ ...;\ n \cdot 0 + n,$$
$$n \cdot 1 + 1;\ n \cdot 1 + 2;\ ...;\ n \cdot 1 + n,$$
$$\ldots,$$
$$n \cdot (n-1) + 1;\ \ n \cdot (n-1) + 2;\ ...;\ n \cdot (n-1) + n.$$

Svaki broj predstavljen je u obliku:

$$n \cdot a + b;\ a = 0, 1, 2, ..., (n-1) \text{ i } b = 1, 2, 3, ... , n.$$

Sada kod svih izdvojenih brojeva posebno zbrojimo prve pribrojnike $n \cdot a$ i posebno druge pribrojnike b. Kako ima n izdvojenih brojeva, pri čemu je iz svakog reda bio uzet samo jedan broj (jer se pri izdvajanju broja svi ostali brojevi ovoga reda precrtavaju), tako je izdvojen točno po jedan broj iz svakog reda. Kod brojeva koji se nalaze u prvom redu, prvi pribrojnik jednak je $n \cdot 0$; kod brojeva koji se nalaze u drugom redu, prvi pribrojnik jednak je $n \cdot 1$; ... ; kod brojeva koji se nalaze u posljednjem redu, prvi pribrojnik jednak je $n \cdot (n-1)$. Prema tome, zbroj svih prvih pribrojnika izdvojenih brojeva jednak je:

$$n \cdot 0 + n \cdot 1 + ... + n \cdot (n-1) = n \cdot (0 + 1 + ... + n - 1) = n \cdot (n-1) \cdot n : 2.$$

Slično, izdvojeni brojevi imaju svojstvo da je iz svakog stupca uzet točno jedan broj. Za brojeve iz prvog stupca, drugi pribrojnik jednak je 1; za brojeve iz drugog stupca, drugi pribrojnik jednak je 2; ... ; za brojeve iz posljednjeg stupca drugi pribrojnik jednak je n. Na taj način zbroj svih drugih pribrojnika jednak je:

$$1 + 2 + ... + n = n \cdot (n+1) : 2.$$

Uzimajući zbroj svih prvih i svih drugih pribrojnika, dobivamo zbroj svih izdvojenih brojeva. Traženi zbroj na taj način jednak je:

$$S = n \cdot n\,(n-1) : 2 + n \cdot (n+1) : 2 = n \cdot (n^2 + 1) : 2$$

i prema tome ne zavisi od načina izdvajanja brojeva.

5. Stisnemo bilo koji prekidač i čekamo, primjerice, desetak minuta. Vratimo ovaj prekidač u prvobitni položaj, a zatim stisnemo neki drugi. Uđemo unutra. Zadnji pritisnuti prekidač odgovara žaruljici koja svijetli. Pipnemo preostale dvije žaruljice. Ona koja je još vruća odgovara prvom pritisnutom prekidaču, a ova treća, hladna, odgovara prekidaču koji nismo dirali.

Vjerujem da si bio sjajan detektiv, da je rješavanje ovih nekoliko zanimljivih situacija iz svijeta sporta bilo lagano, te da si sportašima pomogao riješiti probleme.