Matka 26 (2017./2018.) br. 103

MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

SVJETLO, SJENA I ZRCALO

Pažljivom promatraču sjena odaje „tajne”. Proučavajući sjenu stari su matemagičari riješli mnoge probleme. Dva su svima poznata; prvi je *kako odrediti visinu Keopsove piramide*, a drugi *kako odrediti veličinu (opseg, polumjer) Zemlje*.

Pomoću odraza objekta u vodi također su rješavali visine objekata koje nisu mogli izmjeriti, a za koje mi danas imamo posebne mjerne uređaje. Primjerima ove vrste ilustrirat ćemo kako se to može učiniti pomoću ravnog džepnog zrcala umjesto odraza u vodi.

Poznavanje pravokutnog trokuta i sličnosti jedine su činjenice kojima su uspješno riješili/rješavali vrlo složene probleme. Mjerenje dostupnih veličina dalo im je mogućnost izračuna veličina nedostupnih objekata.

* * * * *

a) Sunce i sjena

Eratosten (oko 276. – 194. g. pr. K.) je pomoću sjene obeliska u Aleksandriji i bunara u Sieni dosta točno odredio opseg Zemlje[1].

Zapitate li se ikada zašto su se u to antičko doba bavili problemom određivanja opsega/polumjera Zemlje? Zapitate li nekog odraslog Matkača, dobit ćete uvijek isti odgovor: *To im je trebalo iz zemljopisnih, tj. transportnih razloga.*

Meni se čini da takvim površnim zaključivanjem ne razumijemo domišljatost i, prije svega, maštovitost starih matemagičara. Mislim da je Eratostenu i ostalima koji su se tim problemom bavili polumjer Zemlje trebao kako bi odredili veličinu Svemira.

Evo činjenica koje govore o tome.

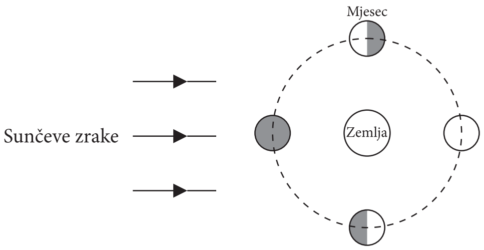
* * * * *

Starogrčki astronom **Aristarh** (oko 320. – 250. g. pr. K.) oko 250. godine pr. K. vrlo je lijepo i jednostavno odredio omjer udaljenosti Sunca i Mjeseca od Zemlje.

Sunce, Mjesec i Zemlja vrhovi su trokuta čiji se kutovi mijenjaju tijekom jednog mjeseca. *Zašto je tako?* – pitate se. Mjesec se vrti oko Zemlje. Suncem

[1]Kako je to on učinio, možete pročitati u članku Z. Šikića: Eratosten, Matka br. 4, str. 14 – 16.

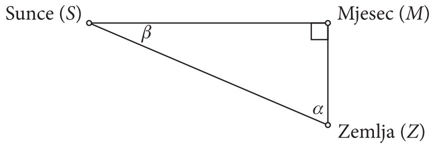
obasjani dio vidimo kao svijetli dio. Vidimo da se osvijetljeni dio Mjesečevog kruga na nebu mijenja od punog (uštap!) do potpuno zamračenog (mrak!). Na Slici 1. prikazano je kako se te promjene vide sa Zemlje, kao i međusobni položaji Sunca, Zemlje i Mjeseca.



Slika 1.

Udaljenost Mjeseca od Zemlje je stalna jer se Mjesec vrti oko Zemlje po kružnici. Također je udaljenost Zemlje od Sunca stalna jer se, u antičkom helicentričnom, kao i u geocentričnom sustavu, oni gibaju po kružnici. U svim se razmatranjima međusobna udaljenost Sunca i Mjeseca mijenja i nju nije lako odrediti.

Mjesec vidimo na pola osvijetljen u prvoj i posljednjoj četvrtini Mjesečevih mijena. Tada je trokut *ZMS* pravokutan, a pravi je kut u vrhu u kojem je Mjesec (Slika 2.):



Slika 2.

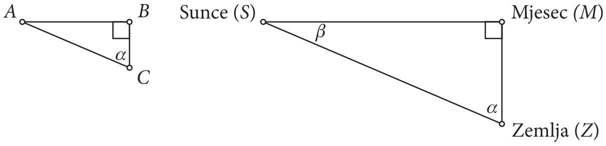
Aristarh je našao da je kut $\alpha = \angle SZM = 87°$. (Nije poznato kako je to učinio!) Nacrtavši trokut *ABC* (Slika 3.) koji je sličan promatranom trokutu *SZM* (dakle, ima iste kutove), Aristarh je uporabom sličnosti dobio da je udaljenost od Zemlje do Sunca 19 puta veća od udaljenosti Mjeseca od Zemlje, tj. da vrijedi

$$|SZ| : |AB| = |ZM| : |BC|,$$

odnosno:

$$|SZ| = 19 \cdot |ZM|.$$

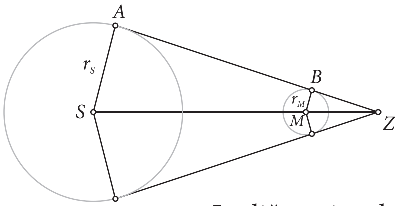
(Stvarni je omjer dvadesetak puta veći jer točnije mjerenje daje da je kut $\alpha = \angle SZM = 89°51'$.)



Slika 3.

Pomoću omjera udaljenosti Sunca i Mjeseca mogu se odrediti i njihove relativne veličine. Prividni promjer Mjeseca i Sunca (to je promjer njihovog kruga kako ga vidimo/mjerimo sa Zemlje) jednak je 0.5°. Prividni promjer

Matka 26 (2017./2018.) br. 103



Slika 4.

Mjeseca izravno se mjeri, dok se Sunčev lako određuje prilikom pomrčine Sunca. Pri tome se nedvosmisleno otkriva da je prividni promjer Sunca jednak Mjesečevom (Slika 4.).

Iz sličnosti trokuta *SZA* i *MZB* (zašto su oni slični?) dobiva se

$$\frac{|SZ|}{|ZM|} = \frac{r_S}{r_M} = 19,$$

tj.

$$r_S = 19 \cdot r_M.$$

Dakle, iz Aristarhova mjerenja i zaključivanja slijedi da je Sunce dvadesetak puta veće od Mjeseca.

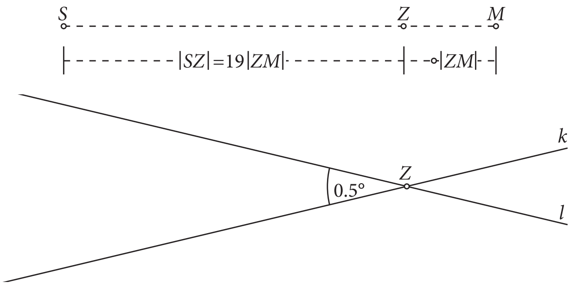
Može li se sjena uporabiti i za određivanje još nekih veličina?

Aristarh je proučavajući pomrčinu Mjeseca, tj. prolazak Mjeseca kroz Zemljinu sjenu, uspio odrediti Mjesečevu udaljenost mjerenu Zemljinom veličinom kao jediničnom. Pomrčina je povezana s rasporedom i dimenzijama svih triju tijela: Sunca, Zemlje i Mjeseca.

Podatke koje je Aristarh dobio poboljšao je **Hiparh** (160. – 127. g. pr. K.).

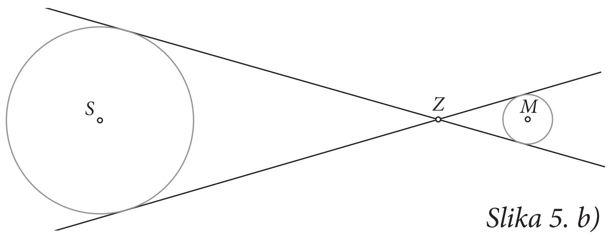
Konstrukcije/crteži na Slikama 5. a) – e) ilustriraju Aristarhove argumente:

- Na velikom papiru nacrtajte na pravcu 3 točke koje predstavljaju Sunce (*S*), Zemlju (*Z*) i Mjesec (*M*), tako da je udaljenost Zemlja–Sunce jednaka 19 duljina Zemlja–Mjesec.
- Kroz točku *Z* nacrtajte dva pravca *k* i *l* tako da zatvaraju kut od 0.5°.



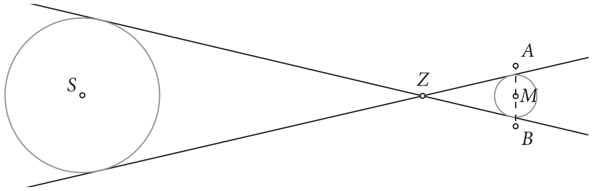
Slika 5. a)

- U točkama *S* i *M* nacrtajte kružnice koje dodiruju pravce *k* i *l*. Ti kružići predstavljaju Sunce i Mjesec.



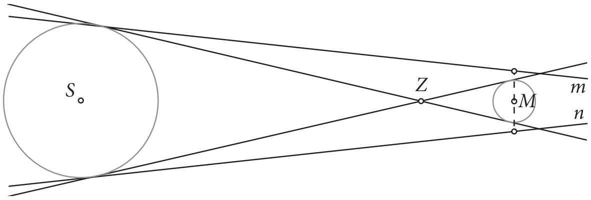
Slika 5. b)

- Kroz središte Mjeseca nacrtajte dužinu $\overline{AB}$ takvu da bude 5 puta dulja od Mjesečevog promjera. Ta dužina predstavlja promjer Zemljine sjene.



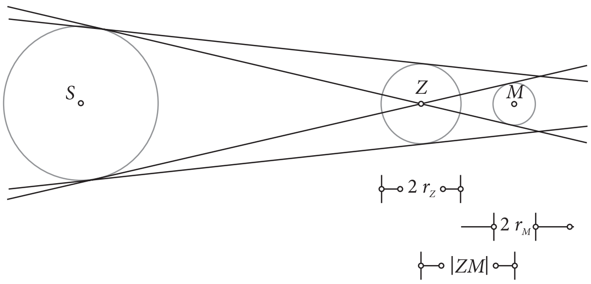
Slika 5. c)

- Iz krajeva ovog promjera $\overline{AB}$ nacrtajte tangente m i n na Sunčevu kružnicu.



Slika 5. d)

- U točki Z nacrtajte kružnicu koja dodiruje tangente m i n. Taj kružić predstavlja Zemlju.
- Izmjerite udaljenost od Mjeseca i njegov promjer u odnosu na promjer Zemlje.



Slika 5. e)

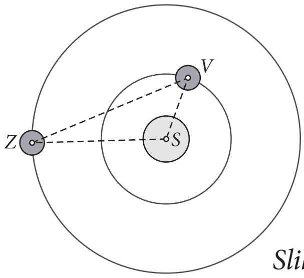
(Mjerenje i račun pokazuju, ako ste točno crtali, da je $|ZM| = 30 \cdot (2r_Z)$, $(2r_M) = \frac{1}{4}(2r_Z)$, tj. $r_M = \frac{1}{4} r_Z$.)

I sad nastupa Eratosten i pomoću sjene obeliska određuje polumjer Zemlje, a time i duljine dijelova Svemira.

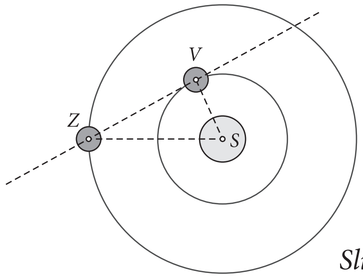
Možemo li ovakvim promatranjima sa Zemlje odrediti udaljenost Venere (i ostalih planeta) od Sunca?

Ako se Venera giba oko Sunca po kružnici, imat ćemo različite vrijednosti kuta $\angle SZV$ (Slika 6.).

Koliki se najveći kut $\angle SZV$ može izmjeriti i kad je to? U trenutku kad je pravac VZ tangenta Venerine kružnice (Slika 7.), taj je kut najveći. Tada je $\angle SVZ = 90°$, a trokut ZSV je pravokutan.



Slika 6.



Slika 7.

Hiparh i, kasnije, **Ptolomej** (oko 100. – oko 178.) izmjerili su da je kut SZV jednak 47° i, znajući kolika je udaljenost od Zemlje do Sunca, izračunali da je udaljenost Venere od Sunca jednaka 108.8 miljuna km.

Slično se određuju udaljenosti i ostalih planeta.

I „krug se zatvorio". Antički astronomi i matematičari pomoću sjene su odredili veličinu njima poznatog dijela Svemira, kao i nebeskih tijela. U sjeni su vidjeli Svemir.

I na kraju, usporedbe radi, dajemo antičke i suvremene podatke kako bismo još jednom istaknuli veličinu antičke matematike.

	antički izvori	današnje vrijednosti
polumjer Zemlje	Eratosten: 6 247 km	6 378 km
polumjer Mjeseca	Aristarh: 1 562 km	1 738 km
	Hiparh: 1 700 km	
udaljenost Mjeseca	Aristarh: 374 820 km	384 400 km
	Hiparh: 387 314 km	
udaljenost Sunca	7 300 000 km	149 600 000 km
polumjer Sunca	32 300 km	696 000 km

b) Svjetlost i zrcalo

Od davnina je poznato da su stari matemagičari pomoću sjene objekta koja pada na ravno tlo određivali visine nedostupnih objekata. Ovdje ćemo ilustrirati kako se to može učiniti pomoću džepnog ravnog zrcala.

Primjer 1. *Odredimo visinu zgrade pomoću džepnog zrcala.*

Rješenje: Neka je visina mjeritelja $|AB| = 1.8$ m, visina zgrade $|CD| = h$, udaljenost zrcala Z od mjeritelja $|AZ| = 2$ m i udaljenost zgrade od mjeritelja $|AC| = 30$ m (Slika 8.).

Trokuti AZB i AZB' sukladni su i slični trokutu ZCD. (Zašto?)

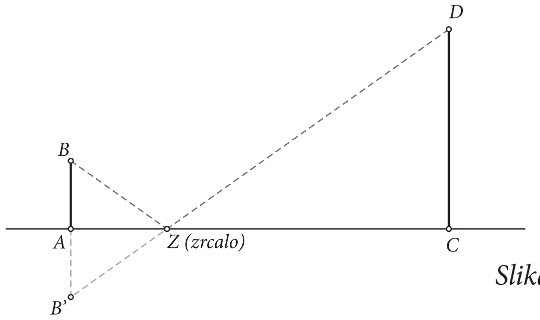
Iz sličnosti trokuta AZB i ZCD slijedi da je

$$\frac{|AB|}{|AZ|}=\frac{|CD|}{|ZC|},$$

odnosno

$$\frac{1,8}{2}=\frac{h}{28}.$$

Odavde je h = 25.2 m.

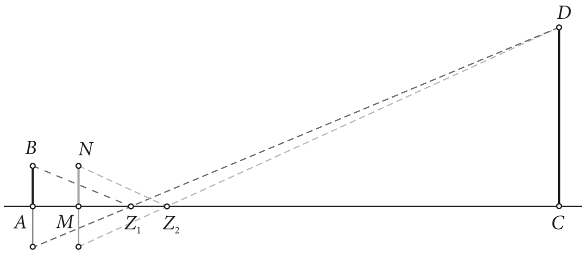


Slika 8.

U slučaju kad se ne može izmjeriti udaljenost mjeritelja od objekta, treba učiniti dva mjerenja. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 2. *Odredimo visinu nedostupnog objekta, tj. objekta kojemu ne možemo izmjeriti udaljenost od mjeritelja i visinu.*

Rješenje: Neka su $|AB| = v = |MN|$, $|AZ_1| = a$, $|AM| = b$, $|MZ_2| = c$, $|AC| = x$ i $|CD| = h$. Veličine a, b, c i v su izmjerene veličine. Kod prvog položaja zrcalo je u točki Z_1, a kod drugog u točki Z_2.



Slika 9.

Iz sličnosti trokuta AZ_1B i Z_1CD slijedi da je

$$\frac{v}{a}=\frac{h}{x-a}, \quad \text{a odavde je} \quad x=\frac{ah+av}{v}.$$

Iz sličnosti trokuta MZ_2N i Z_2CD slijedi da je

$$\frac{v}{c}=\frac{h}{x-b-c}, \quad \text{a odavde je} \quad x=\frac{ch+(b+c)v}{v}.$$

Izjednačimo li ove dvije vrijednosti za x, nakon sređivanja dobivamo

$$h=\frac{(b+c-a)v}{a-c}.$$

Uvrštavanjem izmjerenih konkretnih vrijednosti a, b, c i v izračunamo nepoznatu visinu h objekta. Uvrštavanjem izmjerenih veličina u formulu x dobivamo udaljenost objekta od prvog položaja mjeritelja.

Na sličan su način (bez zrcala) s dva mjerenja stari matemagičari mogli izračunati udaljenost otoka/broda od kopna ili visinu brda/planine.

Zadatak. *Izračunajte visinu:*

a) *svoje škole,*

b) *zvonika obližnje crkve,*

c) *svoje zgrade.*