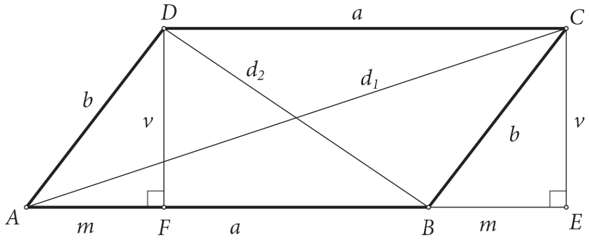
JEDAN POUČAK O PARALELOGRAMU I NJEGOVA PRIMJENA

Šefket Arslanagić, Sarajevo

Učenici osmih razreda znaju da primjenom Pitagorina poučka mogu izračunati duljinu d dijagonale pravokutnika (ako znaju duljine njegovih stranica a i b), tj. da te veličine povezuje izraz $d^2 = a^2 + b^2$. U paralelogramu sa stranicama duljine a i b i dijagonalama duljine d_1 i d_2 vrijedi nešto složenija veza. Dokazat ćemo jedan poučak o paralelogramu koji glasi:

U svakom je paralelogramu zbroj kvadrata duljina dijagonala jednak dvostrukom zbroju kvadrata duljina njegovih stranica.

Dokaz: Neka je četverokut $ABCD$ paralelogram, pri čemu je $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$, $|AC| = d_1$, $|BD| = d_2$ (Slika 1.).



Slika 1.

Neka su točke E i F nožišta okomica iz vrhova C i D paralelograma $ABCD$ na njegovu stranicu $\overline{AB}$ i neka je $|CE| = |DF| = v$, te $|BE| = |AF| = m$. Na temelju Pitagorina poučka primijenjenog na trokute ΔACE, $\Delta ADF \cong \Delta BCE$ i ΔBDF imamo redom:

$$d_1^2 = (a + m)^2 + h^2$$

$$h^2 = b^2 - m^2,$$

$$d_2^2 = (a - m)^2 + h^2,$$

a odavde je:

$$d_1^2 = (a + m)^2 + b^2 - m^2,$$

$$d_2^2 = (a - m)^2 + b^2 - m^2,$$

odnosno

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2am,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2am.$$

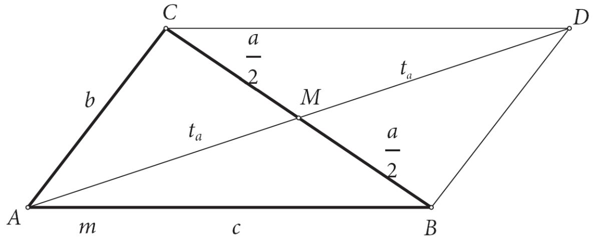
Nakon zbrajanja ovih jednakosti dobivamo:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right), \tag{1}$$

što je trebalo dokazati.

Koristeći jednakost (1), izvest ćemo izraze za duljine težišnica[1] t_a, t_b i t_c trokuta ΔABC, čije su duljine stranica a, b i c.

Neka je $|AM| = t_a$ duljina težišnice nacrtane iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ trokuta ΔABC. Produljimo težišnicu iz vrha A preko točke M tako da bude $|MD| = t_a$ (Slika 2.).



Slika 2.

Četverokut $ABCD$ je paralelogram (zašto?). Na temelju (1) sada imamo:

$$(2t_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2), \text{ tj.}$$

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

a odavde

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \tag{2}$$

ili

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Na sličan način analogno dobivamo:

$$t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2), \tag{3}$$

$$t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2), \tag{4}$$

odnosno

$$t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Posljedica 1. Nakon zbrajanja jednakosti (2), (3) i (4) dobivamo jednakost:

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2), \tag{5}$$

[1]Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta i polovište tome vrhu nasuprotne stranice.

odnosno

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}\left(t_a^2+t_b^2+t_c^2\right). \tag{6}$$

Nadalje, dokazat ćemo još neke nejednakosti u vezi s duljinama stranica i težišnica trokuta:

Nejednakost 1. Dokažimo da u trokutu ΔABC vrijedi nejednakost:

$$t_a^2+t_b^2+t_c^2\geq s^2, \tag{7}$$

pri čemu je s poluopseg trokuta ΔABC, tj. $s=\frac{a+b+c}{2}$.

Dokaz: Koristeći izraze (2), (3) i (4) odnosno (5) slijedi da je dana nejednakost ekvivalentna s nejednakostima:

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2\\
&\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq(a+b+c)^2\\
&\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\
&\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\geq 0\\
&\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0,
\end{aligned}$$

što je točno. Ovime je nejednakost (7) dokazana. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$ (tj. za jednakostranični trokut).

Nejednakost 2. Dokažimo da u trokutu ΔABC vrijedi nejednakost:

$$t_a+t_b+t_c\leq\frac{3}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \tag{8}$$

Dokaz: Nakon kvadriranja nejednakosti (8) ekvivalentna je s nejedankošću

$$\left(t_a+t_b+t_c\right)^2\leq\frac{9}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

odnosno zbog jednakosti (6)

$$\left(t_a+t_b+t_c\right)^2\leq\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}\left(t_a^2+t_b^2+t_c^2\right)$$

$$\left(t_a+t_b+t_c\right)^2\leq 3\left(t_a^2+t_b^2+t_c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow t_a^2+t_b^2+t_c^2+2t_at_b+2t_bt_c+2t_ct_a\leq 3\left(t_a^2+t_b^2+t_c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2t_a^2+2t_b^2+2t_c^2-2t_at_b-2t_bt_c-2t_ct_a\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t_a-t_b\right)^2+\left(t_b-t_c\right)^2+\left(t_c-t_a\right)^2\geq 0,$$

što je točno. Ovime je nejednakost (8) dokazana. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $t_a = t_b = t_c$ (tj. za jednakostranični trokut).

Nejednakost 3. Treba dokazati da u trokutu ΔABC vrijedi nejednakost

$$\frac{t_a}{v_a} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{4P\sqrt{3}}, \tag{9}$$

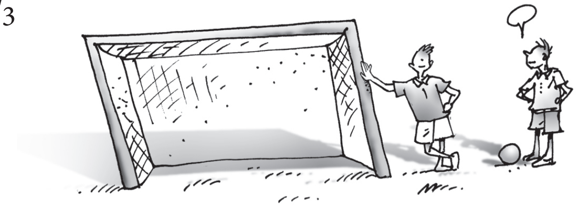
gdje je v_a visina trokuta iz vrha A, a P je njegova površina.

Dokaz: Imamo da je iz (2):

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\text{, te } v_a = \frac{2P}{a}.$$

Dana nejednakost (9) ekvivalentna je s nejedankošću

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{\frac{2P}{a}} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{4P\sqrt{3}}$$



$$\Leftrightarrow a\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}} \;/^2$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right) \le \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6a^2b^2+6a^2c^2-3a^4 \le a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow b^4+c^4+4a^4+2b^2c^2-4a^2b^2-4c^2a^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(b^2+c^2-2a^2\right) \ge 0,$$

što je točno. Ovime je nejednakost (9) dokazana. Vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=b=c$ (tj. za jednakostranični trokut).

Preporučujemo čitaocima ovoga članka da pokušaju dokazati sljedeću nejednakost za trokut ΔABC:

$$r \le \frac{t_a t_b t_c}{s^2} \le \frac{R}{2},$$

gdje je s poluopseg trokuta ΔABC, tj. $s = \frac{a+b+c}{2}$, P je njegova površina, a R i r su polumjeri opisane i upisane kružnice toga trokuta. Pri dokazivanju ćete trebati sljedeće izraze:

$$r = \frac{P}{s},\ R = \frac{abc}{4P} \text{ i } P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ (Heronova formula).}$$

Literatura:

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. A. Marić, *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.