OD KOLAČA DO POJMA GENERALIZACIJE (ILI – OD ANALOGIJE DO GENERALIZACIJE)

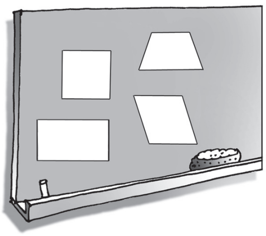
Jadranka Delač-Klepac, Zagreb

Sat čarobmatike Baltazar je započeo sljedećim zadatkom:

Zadatak 1. Što je zajedničko sljedećim likovima: kvadratu, trapezu, rombu, četverokutu i paralelogramu?

U zraku su odmah bile sve ruke, a svi su uglas rekli da ovi likovi imaju po četiri stranice.

– *Pokušajte ih poredati po nekom pravilu ili redu. Možete li to?* – bilo je Baltazarovo pitanje.



Gotovo istovremeno opet su svi učenici zapisali ove pojmove ovako:

Kvadrat, romb, paralelogram, trapez, četverokut.

– *Možete li objasniti ovaj proces razmišljanja?*

Jedna ruka odmah je bila u zraku:

– Kvadrat ima sve četiri stranice jednake duljine i sva četiri kuta jednaka. Romb ima sve četiri stranice jednake i nasuprotni kutovi su mu jednaki. Paralelogram ima nasuprotne stranice jednake duljine, ovdje smo ostavili isto ograničenje za kutove kao kod romba. Trapez ima samo jedno ograničenje – jedan par stranica mu je paralelan, a drugi ne mora biti. Ovdje nismo postavljali uvjete za duljine stranica ili za veličine kutova. I na kraju, četverokut ima četiri stranice i to mu je jedini uvjet. Znači, izostavljali smo jedan po jedan uvjet (zahtjev) na oblik četverokuta, dok nismo došli do najopćenitijeg pojma u sklopu zadanih pojmova. Znači, pojam četverokut obuhvaća u sebi i sve prethodne pojmove.

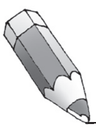
– *Da, ovo je način razmišljanja koji se zove generalizacija ili poop*ćavanje – objasnio im je Baltazar i nastavio:

– *Poopćenje ili generalizacija* česta *je metoda znanstvenog istraživanja, i to ne samo u matematici.*

Riječ **generalizacija** nastala je od latinske riječi *generalizatio*, što znači poopćavanje ili uopćavanje.

Generalizaciji prethodi **analogija** (o analogiji je bilo govora u priči ABRAKADABRA, M*atka* br. 98). Osnovno u generalizaciji induktivni je način razmišljanja, tj. zaključivanje od pojedinačnog k općem, dakle to je metoda kojom se izgrađuju općenitiji pojmovi i općenitije tvrdnje.

Možemo reći i ovako: generalizacija je prijelaz od razmatranja jednog objekta na razmatranje skupa koji sadrži taj objekt; ili prijelaz od razmatranja užeg skupa k razmatranju nekog šireg skupa koji obuhvaća uži.



Ovim načinom razmišljanja koristimo se i u svakodnevnom životu, primjerice kada kažemo:

Ljeti je uvijek vruće.

Na Krku stalno puše bura.

U Engleskoj stalno pada kiša.

Naravno da ove općenite tvrdnje nisu uvijek istinite. Ljeti zna biti i prohladno, na Krku ne puše uvijek bura i nije istina da u Engleskoj uvijek pada kiša. Ali ovdje nas ne zanimaju izuzetci ili ekstremi, već neko općenitije razmišljanje. Da bismo razumjeli općenitije stvari, često moramo proučavati i izuzetke. Suprotnost generalizaciji je **specijalizacija**.

Specijalizacija je prijelaz od razmatranja zadanog skupa objekata prema razmatranju užeg skupa koji je u njemu sadržan. Jer, kako bismo inače znali je li nešto uistinu uobičajeno ili nije?

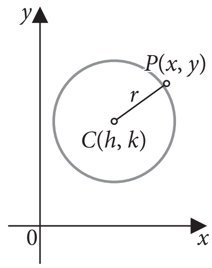
Ili drugi primjer:

Primjer 1. Zamislite da ste na rođendan pozvali prijatelje – jedna je prijateljica alergična na gluten (recimo da ima celijakiju), druga je dijabetičarka, treći frend ne smije jesti kikiriki, četvrti ne smije jesti jagode, a ostali su zdravi u svakom pogledu. Kakav ćete kolač ispeći?

Najjednostavnije je da sami izmislite jedan kolač bez brašna, šećera, kikirikija i jagoda. Recimo, upotrijebite bademe, naranču, malo maslaca, koje jaje... To je jednostavnije nego da radite nekoliko vrsta kolača i gore stavite naljepnice sa sastavom svakoga od njih.

I ovdje ste razmišljali na sličan način. Izbacivali ste iz skupa svih namirnica jednu po jednu namirnicu (jedan po jedan uvjet ili zahtjev) dok na kraju niste dobili sastav kolača koji smiju jesti svi sudionici rođendana.

Ili, možemo to i ovako interpretirati – ovo jest jedna generalizacija jer smo **poopćili koncept** kolača.



Slika 1. kružnica

Primjer 2. Svi znamo kako izgleda kružnica i što je kružnica:

Skup svih točaka P ravnine jednako udaljenih od zadane čvrste točke C zove se **kružnica**.

Možemo li to poopćiti na trodimenzionalni prostor?

Skup svih točaka trodimenzionalnog prostora koje su jednako udaljene od zadane čvrste točke zove se **sfera** (ili lopta koju lako možete svi zamisliti). Dakle, kažemo da su kružnica i sfera analogni objekti (analogoni) u ravnini i prostoru.

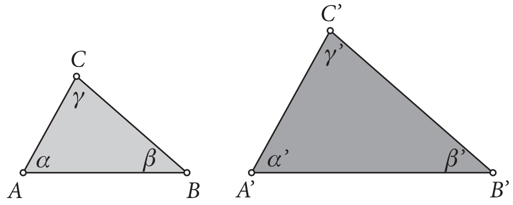
Odnosno, sfera je poopćenje kružnice na trodimenzionalni prostor.
Kako bismo poopćili sferu?
Koji smo uvjet ispustili da bismo od kružnice došli do pojma sfere?
Naravno, ispustili smo zahtjev da točke moraju ležati u jednoj ravnini.

Ako želimo poopćiti pojam sfere kako bismo došli do pojma **hipersfere**, koji bismo zahtjev trebali ispustiti?

Hm... točke ne moraju pripadati trodimenzionalnom prostoru, već nekom većem, s više dimenzija. Recimo, prvom sljedećem – četverodimenzionalnom prostoru. E, tu sada ulazimo u područje prave čarobmatike u kojoj ima mnogo dimenzija, samo što je u tom prostoru malo teže predočiti objekte koji mu pripadaju!

Ali, možda ćete vi to uspjeti jednoga dana nakon izvjesnog vježbanja!

Primjer 3. Primjer generalizacije je i kada se odmaknemo od sukladnih (u svemu jednakih trokuta) na slične trokute (koji imaju jednake veličine kutova $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$, ali ne i duljine stranica):

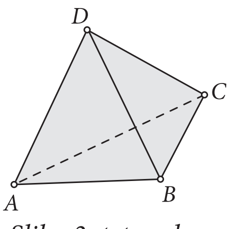


Slika 2. slični trokuti

Primjer 4. Pogledajmo nekoliko primjera generalizacije iz geometrije koje možemo izvući iz nekih spoznaja o trokutu.

Prisjetimo se nekih značenja geometrijskih pojmova:

Trokut je mnogokut koji ima tri vrha i tri stranice (Slika 2.).
Ili: Trokut je najmanji konveksan skup ravnine koji sadrži tri točke koje ne leže na jednom pravcu.



Slika 3. tetraedar

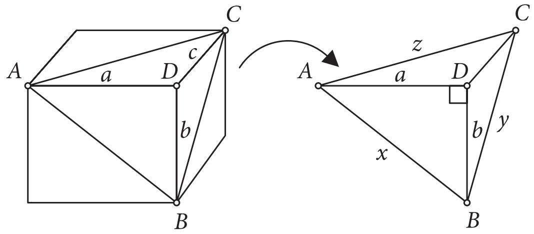
Tetraedar je trostrana piramida, ne nužno uspravna. Tetraedar je poliedar koji ima 4 vrha, 6 bridova i 4 strane koje su trokuti.

Ili: Tetraedar je najmanji konveksan skup trodimenzionalnog prostora koji sadrži 4 točke koje ne pripadaju istoj ravnini.

Trokut i tetraedar analogni su objekti u ravnini i prostoru. Trokut je najjednostavniji poligon, a tetraedar je najjednostavniji poliedar. Kažemo da je tetraedar poopćenje trokuta na trodimenzionalni prostor.

Također možemo reći i da su analogni objekti ili analogoni: pravokutni trokut i pravokutni tetraedar.

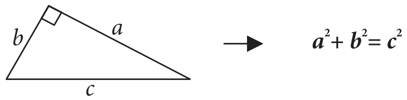
Pravokutni tetraedar lako možemo zamisliti ovako: presiječemo kocku ravninom koja prolazi vrhovima *A, B,* i *C*.



Slika 4. (pravokutni tetraedar)

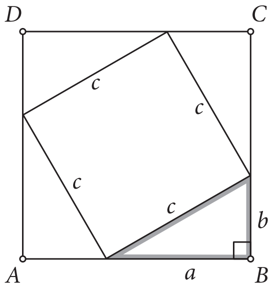
Za pravokutni trokut vrijedi tvrdnja poznata kao **Pitagorin poučak**:

Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta ABC, tada vrijedi jednakost: $a^2 + b^2 = c^2$.



Slika 5. pravokutan trokut i Pitagorin poučak

Dokaz (tzv. direktni dokaz, izravni dokaz ili dokaz sa slike):



Slika 6. dokaz Pitagorina poučka

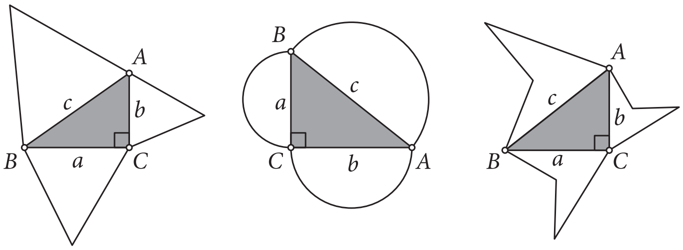
Sa slike vidimo: $(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right) = c^2 + 2ab$, odnosno $a^2 + b^2 = c^2$.

Pogledajmo nekoliko poopćenja Pitagorina teorema:

Poopćenje 1:

Konstruiramo li nad stranicama pravokutnog trokuta slične likove kao na Slici 7., **zbroj površina likova nad katetama bit će jednak površini lika nad hipotenuzom, što lako možemo dokazati.**

Ovdje smo ostali u ravnini i promatrali smo slične površine nacrtane nad stranicama pravokutnog trokuta.



Slika 7. Slični likovi nacrtani nad stranicama pravokutnog trokuta

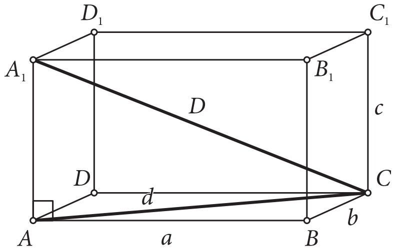
Površine sličnih likova nad stranicama pravokutnog trokuta u istom su odnosu kao i površine kvadrata nad stranicama toga trokuta pa vrijedi: $p_a : p_b : p_c = a^2 : b^2 : c^2$, iz čega slijedi da mora postojati pozitivan realan broj k takav da je: $p_a = ka^2, p_b = kb^2, p_c = kc^2$, tj. $a^2 = \frac{1}{k} p_a, b^2 = \frac{1}{k} p_b, c^2 = \frac{1}{k} p_c$.

Trokut ABC je pravokutan, te za njega vrijedi Pitagorin poučak, pa je: $\frac{1}{k} p_a + \frac{1}{k} p_b = \frac{1}{k} p_c$, odnosno $p_a + p_b = p_c$, čime smo poopćili Pitagorin poučak za slične likove konstruirane nad stranicama pravokutnog trokuta.

Poopćenje 2:

Najjednostavnija generalizacija Pitagorina poučka na trodimenzionalni prostor jest formula za duljinu prostorne dijagonale kvadra.

Promotrimo kvadar na donjoj slici:



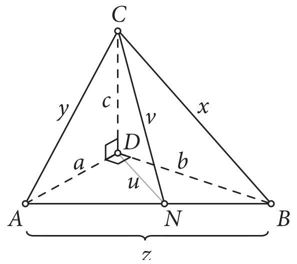
Slika 8. Kvadar i prostorna dijagonala

Primjenom Pitagorina poučka na trokute ACA_1 i ABC imamo:
$D^2 = d^2 + c^2, d^2 = a^2 + b^2$, te ako drugi izraz uvrstimo u prvi, dobivamo $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, izraz koji podsjeća na Pitagorin poučak.

Poopćenje 3:

Nešto složenija generalizacija Pitagorina teorema na trodimenzionalni prostor jest poopćenje koje vrijedi za pravokutni tetraedar:

Kvadrat površine osnovice pravokutnog tetraedra ABC jednak je zbroju kvadrata površina njegovih pravokutnih pobočaka.



Slika 9. pravokutni tetraedar

Tvrdnja: Neka se pravi kutovi strana tetraedra $ABCD$ sastaju u vrhu D.

Ako je $p_1 = p(DBC)$, $p_2 = P(DCA)$, $p_3 = P(DAB)$, $p = P(ABC)$, tada vrijedi jednakost $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p^2$.

Dokaz: Uvedimo oznake: $a = |AD|$, $b = |BD|$, $c = |CD|$, $x = |BC|$, $y = |CA|$, $z = |AB|$.

Neka je N nožište visine iz vrha D na AB. Prema teoremu o okomicama, N je također nožište visine iz C na AB. Neka je $u = |DN|$, $v = |CN|$. Vrijedi:

$$p^2 = \left(\frac{1}{2}zv\right)^2 = \frac{1}{4}z^2\left(u^2 + c^2\right) = \frac{1}{4}z^2u^2 + \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)c^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{2}zu\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ac\right)^2 + \left(\frac{1}{2}bc\right)^2 = p_3^2 + p_2^2 + p_1^2$$

Ovdje smo pokazali da iz jednog zadatka ili primjera možemo izvući više generalizacija – ovisno koje svojstvo proučavamo (ali da bismo bili sigurni da su generalizacije točne, potrebno ih je uvijek i dokazati).

Mnoga svojstva i pravila koja vrijede za trokut vrijede poopćena i za tetraedar, ali ne i sva.

Primjerice:

1. Svakom se trokutu može opisati kružnica. Svakom se tetraedru može opisati sfera. Ovo je točna generalizacija.
2. Visine trokuta sijeku se u jednoj točki koja se zove ortocentar. Visine tetraedra **ne** moraju se sjeći u jednoj točki, ali postoje tetraedri za koje to vrijedi. To su tzv. **ortocentrični** tetraedari. Znači, s generalizacijama treba **uvijek** biti jako oprezan te ih uvijek dokazati, ma kako očigledno one izgledale na prvi pogled.